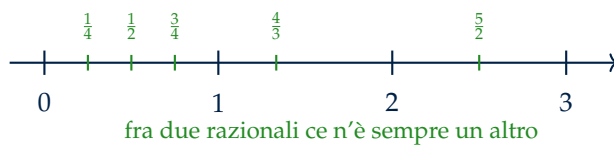


I NUMERI RAZIONALI

ARITMETICA

Frazioni, decimali periodici, potenze a esponente negativo, proporzioni e percentuali



Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Perché i numeri interi non bastano	3
3	Frazioni equivalenti, riduzione, confronto	4
4	Somme e sottrazioni	6
5	Prodotti, quozienti, reciproco	7
6	Frazioni e numeri decimali	8
7	Potenze a esponente intero	10
8	Ricondurre alla stessa base	11
9	Notazione scientifica e ordine di grandezza	12
10	Espressioni complesse in $\mathbb{Q}$	13
11	Rapporti e proporzioni	14
12	Percentuali	15
13	Problemi con le frazioni	17

1 Cosa serve prima di partire

Questo è il capitolo più importante dell'aritmetica, e anche il più lungo. Serve saper fare tre cose: se una è incerta, si ripassa qui.

Cosa devi già sapere

- **MCD e mcm con la scomposizione in fattori primi.** $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ e $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, quindi $\text{MCD} = 2^2 \cdot 3 = 12$ (primi comuni, esponente minore) e $\text{mcm} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ (tutti i primi, esponente maggiore). Il MCD serve per semplificare, il mcm per sommare.
- **La regola dei segni.** Segni uguali danno $+$, segni diversi danno $-$, in prodotti e quozienti. Nelle somme no: $(-3) + (-4) = -7$.
- **Le potenze.** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, e $a^0 = 1$ per $a \neq 0$.

Perché questo capitolo pesa più degli altri: le frazioni non finiscono con l'aritmetica. Tornano in algebra con le frazioni algebriche e le equazioni fratte, in geometria analitica con i coefficienti angolari, in fisica con ogni formula inversa. Chi le rimanda, se le ritrova per quattro anni.

2 Perché i numeri interi non bastano

In $\mathbb{Z}$ la divisione spesso non si può fare: $7 : 2$ non è un intero. Ma dividere una pizza in due, misurare mezzo metro, calcolare tre quarti d'ora sono operazioni ordinarie. Serve un insieme nuovo.

Formula 2.1: L'insieme dei numeri razionali: Un **numero razionale** è un numero che si può scrivere come frazione

$$\frac{a}{b} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0$$

L'insieme di tutti questi numeri si indica con $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Ogni intero è anche razionale: $5 = \frac{5}{1}$.

Il numero a si chiama **numeratore**, b **denominatore**. Il denominatore dice in quante parti si divide l'intero, il numeratore quante se ne prendono.

Il denominatore non può essere zero

$\frac{5}{0}$ non esiste, e non è «infinito». Il motivo: $\frac{5}{0}$ dovrebbe essere quel numero che moltiplicato per 0 dà 5, e un numero così non c'è, perché ogni numero per zero fa zero.

Attenzione al caso opposto, che è legittimo: $\frac{0}{5} = 0$.

Formula 2.2: Q è denso: Fra due razionali distinti c'è **sempre** un altro razionale: basta prendere la media. Per esempio fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ c'è $\frac{5}{8}$.

È la differenza più importante rispetto a $\mathbb{Z}$, che è *discreto*: fra 3 e 4 non c'è nessun intero, ma fra due razionali ce ne sono infiniti.

E allora Q basta per tutto?

No, e si scoprì con uno scandalo. Il lato di un quadrato di area 2 misura $\sqrt{2}$, e $\sqrt{2}$ **non** si può scrivere come frazione: la dimostrazione è di duemilacinquecento anni fa e la si vedrà al secondo anno. Numeri come $\sqrt{2}$ e π si chiamano *irrazionali*, e insieme ai razionali formano i numeri *reali*.

Quindi Q non è l'ultima tappa. È però quella in cui le quattro operazioni funzionano tutte, tranne la divisione per zero.

3 Frazioni equivalenti, riduzione, confronto

Formula 3.1: Frazioni equivalenti: Moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore per lo stesso numero diverso da zero, la frazione non cambia valore:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad (k \neq 0)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{50}{100}$$

È la stessa proprietà invariantiva della divisione: una frazione è una divisione.

Formula 3.2: Riduzione ai minimi termini: Una frazione è **ridotta ai minimi termini** quando numeratore e denominatore sono primi fra loro. Per ridurla si divide entrambi per il loro MCD.

Esempio Svolto 3.1: Ridurre $\frac{84}{360}$:

1. Le due scomposizioni.

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \qquad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

2. Il MCD: primi comuni con l'esponente minore.

$$\text{MCD}(84, 360) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

3. Si divide sopra e sotto per 12.

$$\frac{84}{360} = \frac{84 : 12}{360 : 12} = \frac{7}{30}$$

4. **Controllo:** 7 e 30 sono primi fra loro, quindi non si può semplificare altro.

Scorciatoia pratica: se non si vede subito il MCD, si semplifica un pezzo alla volta — prima per 2, poi per 2, poi per 3 — e si arriva allo stesso posto. È più lento ma non si sbaglia.

Si semplificano i fattori, non gli addendi

Questo è l'errore più grave di tutto il capitolo, e si trascina in algebra per anni:

$$\frac{a+b}{a} \neq b$$

Il numeratore è una *somma*: la a sopra non è un fattore, quindi non si cancella con la a sotto.

Controprova coi numeri: $\frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$, mentre «cancellando» si otterrebbe 6.

La regola in una riga: **si semplifica solo ciò che moltiplica tutto il numeratore e tutto il denominatore.**

Formula 3.3: Confrontare due frazioni:

- Stesso denominatore: è maggiore quella col numeratore maggiore.
- Stesso numeratore: è maggiore quella col denominatore **minore** ($\frac{3}{4} > \frac{3}{7}$: dividere in meno parti dà parti più grandi).
- Caso generale: si portano allo stesso denominatore, oppure si confrontano i prodotti in croce.

Esempio Svolto 3.2: $\frac{5}{7}$ oppure $\frac{7}{9}$?:

1. **Denominatore comune:** $\text{mcm}(7, 9) = 63$.

$$\frac{5}{7} = \frac{45}{63} \qquad \frac{7}{9} = \frac{49}{63}$$

2. **Confronto dei numeratori.**

$$45 < 49 \implies \frac{5}{7} < \frac{7}{9}$$

3. **Lo stesso col prodotto in croce**, più rapido: $5 \cdot 9 = 45$ e $7 \cdot 7 = 49$; il prodotto maggiore sta dalla parte di $\frac{7}{9}$, che è la frazione maggiore.

4 Somme e sottrazioni

Formula 4.1: Somma e differenza di frazioni: Con lo **stesso** denominatore si sommano i numeratori:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Con denominatori diversi si portano prima allo stesso denominatore, che conviene sia il **mcm** dei denominatori.

Metodo 4.1: Sommare due frazioni, sempre così:

1. Riduco ai minimi termini le frazioni di partenza.
2. Calcolo il mcm dei denominatori: è il nuovo denominatore.
3. Per ogni frazione: divido il mcm per il suo denominatore e moltiplico il risultato per il suo numeratore.
4. Sommo (o sottraggo) i numeratori ottenuti.
5. Riduco ai minimi termini il risultato.

Esempio Svolto 4.1: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, e perché non fa $\frac{2}{5}$:

1. **Il denominatore comune.** $\text{mcm}(2, 3) = 6$.

2. **Riscrivo le due frazioni con denominatore 6.**

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \qquad \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

3. Sommo i numeratori.

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

4. Perché $\frac{2}{5}$ è sbagliato. Metà pizza più un terzo di pizza è più di mezza pizza. Ma $\frac{2}{5}$ è meno di $\frac{1}{2}$: il risultato sarebbe più piccolo di uno dei due addendi, che è assurdo. $\frac{5}{6}$ invece è quasi una pizza intera: torna.

Numeratori con numeratori, denominatori con denominatori: mai

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$$

Il motivo è che le due frazioni misurano parti di grandezza diversa: i sesti si sommano coi sesti, non i mezzi coi terzi. È come sommare metri e centimetri senza convertirli.

Il controllo di ragionevolezza salva sempre: **una somma di due numeri positivi deve essere più grande di ciascuno dei due.**

5 Prodotti, quozienti, reciproco

Formula 5.1: Prodotto:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Qui — e solo qui — si moltiplica «diritto»: numeratori fra loro e denominatori fra loro. Conviene semplificare **prima** di moltiplicare, in croce.

Formula 5.2: Reciproco e quoziente: Il **reciproco** di $\frac{a}{b}$ (con $a \neq 0$) è $\frac{b}{a}$: la frazione capovolta. Il prodotto di un numero per il suo reciproco fa sempre 1.

Dividere per una frazione significa moltiplicare per il suo reciproco:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Esempio Svolto 5.1: $\frac{3}{4} : \frac{9}{8}$, **semplificando prima:**

1. Si capovolge la seconda e si moltiplica.

$$\frac{3}{4} : \frac{9}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$$

2. Si semplifica in croce, prima di moltiplicare: 3 con 9 (dividendo per 3) e 4 con 8

(dividendo per 4).

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

3. Controllo. Moltiplicando senza semplificare: $\frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \frac{24}{36}$, che ridotto fa $\frac{2}{3}$. Stesso risultato, più fatica e più errori possibili.

Dividere può far crescere

$$6 : \frac{1}{2} = 6 \cdot 2 = 12$$

Dividere per un numero *minore di 1* dà un risultato **più grande** del numero di partenza.

Non è un errore: «quante mezzepizze stanno in 6 pizze?» — dodici.

Il riflesso «dividere rimpicciolisce» viene dagli interi e in $\mathbb{Q}$ non vale più.

6 Frazioni e numeri decimali

Ogni frazione, eseguendo la divisione, dà un numero decimale. Il punto interessante è che i casi possibili sono soltanto due.

Formula 6.1: Decimale finito o periodico: Sia $\frac{a}{b}$ ridotta ai minimi termini.

- Se b contiene solo i fattori 2 e 5, il decimale è **finito**.
- Altrimenti è **periodico**: da un certo punto in poi un gruppo di cifre si ripete per sempre.

Un decimale infinito e *non* periodico non può venire da una frazione: quelli sono i numeri irrazionali.

Esempio Svolto 6.1: Due divisioni, due destini:

1. $\frac{7}{8}$. Il denominatore è $8 = 2^3$: solo fattori 2.

$$7 : 8 = 0,875$$

Finito, tre cifre decimali.

2. $\frac{4}{7}$. Il denominatore è 7, che non è né 2 né 5.

$$4 : 7 = 0,571428\,571428\ldots = 0,\overline{571428}$$

Periodico, con periodo di sei cifre. La soprallineatura indica il periodo.

Perché il periodo esiste per forza: dividendo per 7 i resti possibili sono solo 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prima o poi un resto si ripete, e da quel momento si ripetono anche le cifre. Il periodo non può essere più lungo di $b - 1$ cifre.

Formula 6.2: Nomi delle parti: In $2,1\overline{6}$:

- 2 è la **parte intera**;
- 1 è l'**antiperiodo**: le cifre decimali che non si ripetono;
- 6 è il **periodo**: il gruppo che si ripete.

Senza antiperiodo il numero si dice *periodico semplice* ($0,\overline{45}$); con l'antiperiodo, *periodico misto*.

Formula 6.3: Frazione generatrice: Per tornare dal decimale alla frazione:

- **numeratore**: tutte le cifre (ignorando la virgola) meno quelle che non si ripetono;
- **denominatore**: tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti 0 quante sono quelle dell'antiperiodo.

Esempio Svolto 6.2: Due frazioni generatrici:

1. $0,\overline{45}$ (periodico semplice).

Tutte le cifre: 45. Cifre non periodiche: nessuna, cioè 0. Il periodo ha due cifre, l'antiperiodo zero: sotto due nove.

$$0,\overline{45} = \frac{45 - 0}{99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

Controllo: $5 : 11 = 0,454545 \dots$ Torna.

2. $2,1\overline{6}$ (periodico misto).

Tutte le cifre: 216. Cifre non periodiche: 21. Il periodo ha una cifra (un 9), l'antiperiodo una (uno 0): sotto 90.

$$2,1\overline{6} = \frac{216 - 21}{90} = \frac{195}{90} = \frac{13}{6}$$

Controllo: $13 : 6 = 2,1666 \dots$ Torna.

Esempio Svolto 6.3: Perché la formula funziona, e perché $0,\overline{9} = 1$:

Il trucco è moltiplicare per una potenza di 10 per far «scorrere» il periodo. Sia $x = 0,\overline{45}$.

1. **Moltiplico per 100** (due cifre di periodo):

$$100x = 45,\overline{45}$$

2. **Sottraggo la prima dalla seconda:** le code infinite sono identiche e si cancellano.

$$100x - x = 45,\overline{45} - 0,\overline{45} = 45$$

3. **Quindi** $99x = 45$, da cui $x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$. Ecco da dove vengono i nove al denominatore.

Adesso lo stesso conto su $x = 0,\overline{9}$:

$$10x = 9,\overline{9} \implies 10x - x = 9 \implies 9x = 9 \implies x = 1$$

Non è un'approssimazione e non è un trucco: $0,\overline{9}$ è il numero 1, scritto in un altro modo. Se fossero diversi, in mezzo ci dovrebbe stare un altro numero — e non c'è.

7 Potenze a esponente intero

Finora l'esponente era un numero naturale. In $\mathbb{Q}$ si può fare di più, e la strada la indica una regola che già conosciamo.

Formula 7.1: Da dove nasce l'esponente negativo: La regola $a^m : a^n = a^{m-n}$ vale per $m > n$. Se la si vuole valida *sempre*, l'esponente negativo si definisce da sé:

$$\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} \quad \text{e} \quad \frac{2^3}{2^5} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

Quindi 2^{-2} deve valere $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$.

Formula 7.2: Potenza a esponente negativo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Un esponente negativo dice «**fai il reciproco**». Le cinque proprietà delle potenze continuano a valere identiche, per qualunque esponente intero.

Esempio Svolto 7.1: La discesa degli esponenti:

Si legga questa colonna dall'alto in basso: ogni riga è la metà della precedente, e la regola non si interrompe mai.

$$\begin{array}{cccc} 2^3 = 8 & 2^2 = 4 & 2^1 = 2 & 2^0 = 1 \\ 2^{-1} = \frac{1}{2} & 2^{-2} = \frac{1}{4} & 2^{-3} = \frac{1}{8} & \end{array}$$

L'esponente negativo non è una regola in più da imparare: è la stessa regola che continua.

Esponente negativo non vuol dire risultato negativo

$$2^{-3} = \frac{1}{8} \quad \text{positivo!}$$

Il segno del *risultato* dipende dalla base, non dall'esponente. Quattro casi da tenere distinti:

$$\begin{array}{ll} (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = +\frac{1}{4} & -2^{-2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4} \\ (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8} & -2^{-3} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8} \end{array}$$

Come sempre: senza parentesi il meno non fa parte della base.

8 Ricondurre alla stessa base

Le proprietà delle potenze funzionano solo fra potenze con la *stessa base*. Molte espressioni sembrano complicate solo perché le basi sono scritte in modo diverso: 4, 8, 16 e 32 sono tutte potenze di 2.

Metodo 8.1: Come si riconduce tutto a una base:

1. Guardo le basi e cerco la più piccola che genera le altre (2 per 4, 8, 16, 32; 3 per 9, 27, 81; 5 per 25, 125).
2. Riscrivo ogni base come potenza di quella: $8 = 2^3$.
3. Uso $(a^m)^n = a^{mn}$ per compattare gli esponenti.
4. Applico prodotto e quoziente sommando e sottraendo gli esponenti.
5. Solo alla fine, se serve, calcolo il valore.

Esempio Svolto 8.1: $\frac{4^3 \cdot 8^2}{2^{11}}$ tutto in base 2:

1. **Riscrivo le basi.** $4 = 2^2$ e $8 = 2^3$.

$$\frac{(2^2)^3 \cdot (2^3)^2}{2^{11}}$$

2. **Potenza di potenza:** gli esponenti si moltiplicano.

$$\frac{2^6 \cdot 2^6}{2^{11}}$$

3. **Prodotto:** gli esponenti si sommano.

$$\frac{2^{12}}{2^{11}}$$

4. **Quoziente:** gli esponenti si sottraggono.

$$2^{12-11} = 2^1 = 2$$

5. **Controllo.** Senza il metodo: $4^3 = 64$, $8^2 = 64$, $64 \cdot 64 = 4096$, e $2^{11} = 2048$; $4096 : 2048 = 2$. Torna, ma con numeri quattro volte più grandi e quattro volte più occasioni di sbagliare.

9 Notazione scientifica e ordine di grandezza

Formula 9.1: Notazione scientifica: Un numero è in notazione scientifica quando è scritto come

$$a \cdot 10^n \quad \text{con } 1 \leq a < 10 \text{ e } n \in \mathbb{Z}$$

L'esponente n è positivo per i numeri grandi, negativo per i piccoli. L'**ordine di grandezza** è la potenza di 10 più vicina: si guarda se a è minore o maggiore di $\sqrt{10} \approx 3,16$.

Esempio Svolto 9.1: Numeri veri, scritti bene:

Grandezza	Valore	Notazione scientifica
Distanza Terra-Sole	149 600 000 000 m	$1,496 \cdot 10^{11}$ m
Massa dell'elettrone	0,000...911 kg	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
Numero di Avogadro	602 000...	$6,022 \cdot 10^{23}$
Diametro di un capello	0,00007 m	$7 \cdot 10^{-5}$ m

Come si converte: si sposta la virgola fino ad avere una sola cifra diversa da zero prima di essa, e si conta di quanti posti si è spostata. Verso sinistra l'esponente è positivo, verso

destra negativo.

$$0,00007 = 7 \cdot 10^{-5} \quad (\text{virgola spostata di 5 a destra})$$

Ordine di grandezza: per la massa dell'elettrone $a = 9,11 > 3,16$, quindi l'ordine di grandezza è 10^{-30} , non 10^{-31} .

A cosa serve davvero

A moltiplicare numeri enormi senza calcolatrice. Quante molecole d'acqua in un bicchiere? Circa 10 moli, cioè $10 \cdot 6 \cdot 10^{23} = 6 \cdot 10^{24}$: si moltiplicano le cifre e si sommano gli esponenti, e il conto sta su una riga.

10 Espressioni complesse in $\mathbb{Q}$

L'ordine delle operazioni è sempre lo stesso. Le novità sono due: i risultati intermedi sono frazioni, e possono comparire **frazioni di frazioni**.

Formula 10.1: Frazione di frazione: Una frazione la cui linea principale separa due frazioni è una divisione:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

La linea **più lunga** è quella che divide: per questo va scritta più lunga.

Esempio Svolto 10.1: Un'espressione con tutto dentro:

Calcoliamo

$$\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right] \cdot 4 : \left(\frac{1}{2} \right)^{-1}$$

1. La parentesi quadra: denominatore comune 6.

$$\frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. L'esponente negativo: $\left(\frac{1}{2} \right)^{-1}$ è il reciproco di $\frac{1}{2}$, cioè 2.

$$\frac{1}{2} \cdot 4 : 2$$

3. Prodotti e divisioni da sinistra a destra.

$$\frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \quad \longrightarrow \quad 2 : 2 = 1$$

4. Controllo di ragionevolezza. Tutti i numeri in gioco erano dell'ordine dell'unità, e il risultato è 1: plausibile. Se fosse venuto $\frac{1}{48}$ o 32, valeva la pena rifare i conti.

11 Rapporti e proporzioni

Formula 11.1: Rapporto e proporzione: Il **rapporto** fra due numeri è il loro quoziente:
 $a : b$.

Una **proporzione** è l'uguaglianza di due rapporti:

$$a : b = c : d$$

a e d si chiamano **estremi**, b e c **medi**.

Formula 11.2: Proprietà fondamentale:

$$a : b = c : d \iff a \cdot d = b \cdot c$$

Il **prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi**. Da qui si ricava qualunque termine mancante: si moltiplicano i due termini noti «in diagonale» e si divide per il terzo.

Esempio Svolto 11.1: Trovare il quarto proporzionale:

RisolviAMO $3 : 8 = x : 24$.

1. Prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi.

$$3 \cdot 24 = 8 \cdot x$$

2. Calcolo.

$$72 = 8x \implies x = \frac{72}{8} = 9$$

3. Controllo: $3 : 8 = 0,375$ e $9 : 24 = 0,375$. Sono lo stesso rapporto.

Formula 11.3: Grandezze proporzionali:

- **Direttamente proporzionali:** raddoppiando una raddoppia l'altra. Il loro **rapporto** è costante: $\frac{y}{x} = k$. Esempio: quantità di pane e prezzo.
- **Inversamente proporzionali:** raddoppiando una l'altra si dimezza. Il loro **prodotto**

è costante: $x \cdot y = k$. Esempio: numero di operai e tempo per finire un lavoro.

Non tutto è direttamente proporzionale

Se 3 operai finiscono un lavoro in 12 giorni, 6 operai non ci mettono 24 giorni: ce ne mettono 6. Qui è il *prodotto* a restare costante, non il rapporto:

$$3 \cdot 12 = 36 \quad 6 \cdot 6 = 36$$

Prima di impostare una proporzione bisogna chiedersi: **se una grandezza aumenta, l'altra aumenta o diminuisce?** La risposta decide quale dei due schemi usare.

12 Percentuali

Formula 12.1: Cos'è una percentuale: $p\%$ è una frazione con denominatore 100:

$$p\% = \frac{p}{100} \quad 15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20} = 0,15$$

Calcolare il $p\%$ di una quantità significa moltiplicarla per $\frac{p}{100}$.

Formula 12.2: Le tre domande:

$$\text{Quanto è il } p\% \text{ di } T? \quad P = T \cdot \frac{p}{100}$$

$$\text{Che percentuale è } P \text{ di } T? \quad p = \frac{P}{T} \cdot 100$$

$$\text{Se il } p\% \text{ è } P, \text{ quanto è il totale?} \quad T = P \cdot \frac{100}{p}$$

Formula 12.3: Aumenti e sconti: Aumentare del $p\%$ significa moltiplicare per $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$; scontare del $p\%$ significa moltiplicare per $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

$$+20\% \rightarrow \cdot 1,2 \quad -30\% \rightarrow \cdot 0,7$$

Due variazioni di fila si **moltiplicano**, non si sommano.

Esempio Svolto 12.1: Due sconti non fanno la loro somma:

Un capo costa 200 euro. Sconto del 30%, e poi un altro 20% sul prezzo già scontato.

1. Primo sconto.

$$200 \cdot 0,7 = 140 \text{ euro}$$

2. Secondo sconto, sul nuovo prezzo.

$$140 \cdot 0,8 = \mathbf{112} \text{ euro}$$

3. Lo sconto complessivo. Da 200 a 112 si sono risparmiati 88 euro, cioè

$$\frac{88}{200} \cdot 100 = 44\%$$

non il 50%. Il secondo 20% si applica a una cifra più piccola, quindi vale meno.

In una riga: $0,7 \cdot 0,8 = 0,56$, cioè si paga il 56% e si sconta il 44%.

Il ritorno al valore iniziale

Un prezzo aumenta del 20% e poi cala del 20%: **non** torna come prima.

$$100 \xrightarrow{+20\%} 120 \xrightarrow{-20\%} 96$$

Il motivo: il +20% si calcola su 100, il -20% su 120. Sono percentuali della stessa taglia ma di quantità diverse.

Per tornare davvero a 100 da 120 serve uno sconto di $\frac{20}{120} \cdot 100 = 16,\bar{6}\%$.

Esempio Svolto 12.2: Risalire al prezzo di partenza:

Un oggetto in saldo costa 96 euro dopo uno sconto del 20%. Quanto costava prima?

1. L'errore da non fare: aggiungere il 20% a 96 darebbe 115,20, che è sbagliato.

2. Il ragionamento giusto. 96 è l'80% del prezzo iniziale T :

$$96 = T \cdot 0,8$$

3. Si divide.

$$T = \frac{96}{0,8} = \mathbf{120} \text{ euro}$$

4. Controllo. Il 20% di 120 è 24, e $120 - 24 = 96$. Torna.

13 Problemi con le frazioni

Metodo 13.1: La frazione di una quantità: «I $\frac{3}{5}$ di 40» si calcola moltiplicando: $40 \cdot \frac{3}{5} = 24$.
 Il trucco pratico: si divide per il denominatore e si moltiplica per il numeratore.
 Per il problema inverso — «i $\frac{3}{5}$ di una quantità sono 24, quanto è la quantità?» — si divide:
 $24 : \frac{3}{5} = 40$.

Esempio Svolto 13.1: Il problema classico delle frazioni successive:

Ho letto $\frac{2}{5}$ di un libro, poi $\frac{1}{3}$ delle pagine rimaste. Mi restano 60 pagine. Quante ne ha il libro?

1. **Dopo la prima lettura** resta $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ del libro.

2. **La seconda lettura** è $\frac{1}{3}$ di quel resto, non del libro intero:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

3. **Letto in tutto:** $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$. Resta $\frac{2}{5}$.

4. **Quel resto vale 60 pagine.**

$$\frac{2}{5} \cdot T = 60 \implies T = 60 : \frac{2}{5} = 60 \cdot \frac{5}{2} = \mathbf{150} \text{ pagine}$$

5. **Controllo.** $\frac{2}{5}$ di 150 è 60 pagine lette; restano 90; un terzo di 90 è 30; $90 - 30 = 60$. Torna.

La trappola: la seconda frazione si riferisce al *resto*. Chi somma $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ risolve un altro problema.

Indice analitico

Aumento, 15

Espressioni in Q , 13

Frazione generatrice, 8

Frazioni equivalenti, 4

Insieme Q , 3

Notazione scientifica, 12

Numeri decimali, 8

Numeri periodici, 8

Numeri razionali, 3

Ordine di grandezza, 12

Percentuale, 15

Potenze

 esponente negativo, 10

Problemi con le frazioni, 17

Prodotto di frazioni, 7

Proporzionalità, 14

Proporzione, 14

Rapporto, 14

Reciproco, 7

Riduzione ai minimi termini, 4

Sconto, 15

Somma di frazioni, 6

Stessa base, 11