

FORMULARIO: INSIEMI

In ogni riquadro: la regola con le sue condizioni e un esempio con i numeri.

1 Che cos'è

1.1 Insieme, elemento, appartenenza

Un **insieme** è un raggruppamento di oggetti per cui esiste un **criterio oggettivo** che dice se un oggetto ci sta dentro o no. Gli insiemi si scrivono con la **maiuscola**, gli elementi con la **minuscola**.

$$x \in A \text{ «appartiene»} \quad x \notin A \text{ «non appartiene»}$$

ESEMPIO

«I naturali maggiori di 2 e minori di 7» è un insieme: sono 3, 4, 5, 6.

«I cinque film migliori» **non** lo è: il criterio non è oggettivo.

1.2 Gli insiemi numerici

$\mathbb{N}$	naturali	$0, 1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{Z}$	interi	$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
$\mathbb{Q}$	razionali	tutto ciò che è frazione
$\mathbb{R}$	reali	anche $\sqrt{2}$ e π

Ognuno contiene il precedente: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

ESEMPIO

$-15 \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; $\frac{4}{2} \in \mathbb{N}$ perché vale 2. **Prima si calcola, poi si decide dove sta.**

2 Come si scrive

2.1 Per elencazione

Si scrivono tutti gli elementi fra **graffe**, separati da virgola. Ogni elemento **una volta sola**, e **l'ordine non conta**.

$$V = \{a, e, i, o, u\} \quad \{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$$

ESEMPIO

Le lettere di «attaccapanni» sono $\{a, t, c, p, n, i\}$: sei, non dodici. Le ripetizioni non si scrivono.

2.2 Per proprietà caratteristica

Si scrive l'insieme di partenza, la barra $|$ che si legge «**tale che**», e la condizione.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\} = \{4, 5, 6, 7, \dots\}$$

L'insieme di partenza **va sempre dichiarato**: senza, non si sa se si pesca da $\mathbb{N}$ o da $\mathbb{R}$.

ESEMPIO

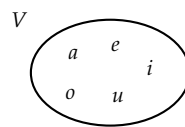
I pari: $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$.

La stessa proprietà si può scrivere in modi diversi: «multiplo di 2 e di 3» e «divisibile per 6» danno lo stesso insieme.

2.3 Con il diagramma di Venn

Una linea chiusa, e dentro un puntino per ogni elemento. Serve a *vedere* le operazioni, non a fare conti.

ESEMPIO



2.4 Insieme vuoto

L'insieme senza elementi si scrive $\emptyset$. Ne esiste **uno solo**.

$$|\emptyset| = 0 \quad \text{ma} \quad |\{\emptyset\}| = 1$$

$\{\emptyset\}$ **non** è vuoto: contiene un elemento, che è l'insieme vuoto.

ESEMPIO

Sono vuoti: «i quadrati con angoli acuti»; «i dispari divisibili per 4»; $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 1\}$.

$\{0\}$ invece **non** è vuoto: contiene lo zero.

2.5 Cardinalità, insiemi finiti e infiniti

Se A è finito, il numero dei suoi elementi è la **cardinalità** $|A|$.

$$V = \{a, e, i, o, u\} \implies |V| = 5$$

ESEMPIO

$\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$ ha $4 + 4 + 1 = 9$ elementi: i negativi, i positivi e **lo zero**, che si dimentica sempre. I multipli di 3 sono infiniti.

3 Sottoinsiemi

3.1 Inclusione: $\subseteq$ e $\subset$

$B \subseteq A$ (« B è **incluso** in A ») se **ogni** elemento di B sta in A .

$B \subset A$ («incluso **strettamente**») se in più c'è almeno un elemento di A che non sta in B .

$\not\subseteq$ nega l'inclusione.

ESEMPIO

$\{2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$; $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$.

Per smentire un'inclusione basta **un** controesempio.

3.2 Propri e impropri

Per ogni insieme A :

$$A \subseteq A \quad \emptyset \subseteq A$$

A e $\emptyset$ sono i sottoinsiemi **impropri**; tutti gli altri sono **propri**.

ESEMPIO

$A \subseteq A$ è vero, $A \subset A$ è **falso**: l'inclusione stretta esclude l'uguaglianza.

3.3 $\in$ oppure $\subset$? La tabella che salva

a sinistra c'è	si usa	
un <i>elemento</i>	$\in$	$\notin$
un <i>insieme</i>	$\subseteq$	$\subset$ $\not\subseteq$

ESEMPIO

Con $A = \{4, 6\}$:

$6 \in A$ **giusto** $\{6\} \in A$ **sbagliato** $\{6\} \subset A$ **giusto**

È l'errore numero uno di tutto il capitolo.

3.4 Uguaglianza per doppia inclusione

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$

È il modo di dimostrare che due insiemi scritti diversamente sono lo stesso insieme.

ESEMPIO

Le lettere di «casella» e quelle di «calesse» sono lo stesso insieme $\{c, a, s, e, l\}$: ognuna sta nell'altro.

3.5 Insieme delle parti

$\mathcal{P}(A)$ è l'insieme di **tutti** i sottoinsiemi di A , impropri compresi.

$$|A| = n \implies |\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

Non $2n$ e non n^2 : con $|A| = 5$ sono 32.

ESEMPIO

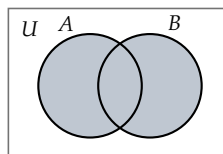
$A = \{a, b, c\}$: $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$, otto = 2^3 .
 $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$: **un** elemento, e $2^0 = 1$.

4 Le operazioni

4.1 Unione

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

L'ò è **inclusivo**: comprende anche chi sta in tutti e due. Gli elementi comuni si scrivono **una volta sola**.

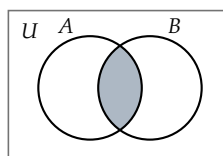


ESEMPIO

$\{0, 2, 4, 6, 8\} \cup \{0, 3, 6, 9\} = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$.

4.2 Intersezione

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



ESEMPIO

$\{0, 2, 4, 6, 8\} \cap \{0, 3, 6, 9\} = \{0, 6\}$: i multipli di 6.

4.3 Insiemi disgiunti

Due insiemi senza elementi in comune si dicono **disgiunti**:

$$A \cap B = \emptyset$$

ESEMPIO

Gli studenti sufficienti e quelli insufficienti in matematica: $S \cap I = \emptyset$.

4.4 I casi che si fanno a memoria

$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$

Se $B \subseteq A$:

$$A \cup B = A \qquad A \cap B = B$$

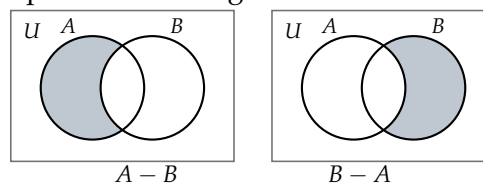
ESEMPIO

A i poligoni, B i triangoli: $A \cup B$ sono i poligoni, $A \cap B$ sono i triangoli.

4.5 Differenza

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Non è commutativa: si legge «parto da A e tolgo B ».

**ESEMPIO**

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$: $A - B = \{2, 4\}$ ma $B - A = \{5\}$.

4.6 Differenza: i casi particolari

$$A \subseteq B \implies A - B = \emptyset$$

$$A \cap B = \emptyset \implies A - B = A$$

$$A - A = \emptyset \qquad A - \emptyset = A \qquad \emptyset - A = \emptyset$$

ESEMPIO

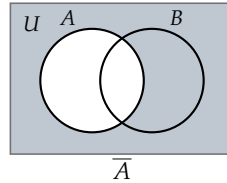
$A - B$, $B - A$ e $A \cap B$ messi insieme ricostruiscono $A \cup B$: è il controllo più veloce.

4.7 Complementare e insieme universo

Con $B \subseteq A$, il **complementare** di B rispetto ad A è

$$\overline{B}_A = A - B$$

Se tutti gli insiemi stanno dentro un **insieme universo** U , si scrive $\overline{A}$ senza pedice — **ma** U **va dichiarato**.

**ESEMPIO**

$$\bar{A}_A = \emptyset \text{ e } \bar{\emptyset}_A = A.$$

«Il complementare dei pari» non vuol dire niente finché non si dice se $U = \mathbb{N}$ o $U = \mathbb{Z}$.

4.8 Leggi di De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Il complementare **scambia** $\cup$ con $\cap$. A parole: «non stare in nessuno dei due» = «stare fuori dal primo e fuori dal secondo».

ESEMPIO

$U = \{1, \dots, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$: $\overline{A \cup B} = \{7, 8\}$ e $\bar{A} \cap \bar{B} = \{5, 6, 7, 8\} \cap \{1, 2, 7, 8\} = \{7, 8\}$.

4.9 Partizione

Una famiglia di sottoinsiemi di A è una **partizione** se, tutte e tre insieme:

1. la loro unione è A ;
2. sono disgiunti a due a due;
3. nessuno è vuoto.

ESEMPIO

Vocali e consonanti sono una partizione dell'alfabeto.

Controllo veloce: se sono disgiunti, la somma delle cardinalità deve fare esattamente $|A|$. Se viene di più c'è sovrapposizione, se viene di meno manca qualcosa.

4.10 Prodotto cartesiano

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Le coppie sono **ordinate**: $(5; 2) \neq (2; 5)$. Quindi

$$A \times B \neq B \times A \quad \text{se } A \neq B$$

ma la cardinalità è la stessa:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

ESEMPIO

$A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2\}$: $A \times B = \{(4; 1), (4; 2), (5; 1), (5; 2), (6; 1), (6; 2)\}$, sei coppie = $3 \cdot 2$. Sono i numeri 41, 42, 51, 52, 61, 62.

5 Proprietà e problemi**5.1 Le proprietà di unione e intersezione**

commutativa $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$

associativa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

distributiva $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

La distributiva vale nei **due versi**: fra i numeri no.

ESEMPIO

Non c'è precedenza fra $\cup$ e $\cap$: senza parentesi la scrittura è ambigua. $A \cup (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cap C$ sono due cose diverse.

5.2 La formula delle cardinalità

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Si toglie l'intersezione perché sommando $|A|$ e $|B|$ gli elementi comuni sono stati contati **due volte**.

ESEMPIO

224 studenti, 123 col portatile, 149 col tablet:

$$|C \cap T| = 123 + 149 - 224 = 48$$

Solo portatile $123 - 48 = 75$; solo tablet $149 - 48 = 101$; e $75 + 48 + 101 = 224$.

5.3 Riempire un diagramma nei problemi

1. Do un nome a ogni insieme e scrivo U .
2. Traduco ogni frase in una **cardinalità**.
3. Parto dalla regione **più interna** e vado verso l'esterno sottraendo.
4. Controllo: tutte le regioni sommate, più quelli fuori, danno $|U|$.

ESEMPIO

I numeri scritti nel diagramma **non sono elementi, sono quantità**.

«3 a fisica e a danza» *non* vuol dire «3 solo a fisica e danza»: la prima frase comprende anche chi fa la terza attività.

Tutti i simboli, in una riga

$\in$	appartiene	$\cup$	unione
$\notin$	non appartiene	$\cap$	intersezione
$\subseteq$	incluso	$-$	differenza
$\subset$	incluso strettamente	$\overline{A}$	complementare
$\not\subseteq$	non incluso	$\times$	prodotto cartesiano
$\emptyset$	insieme vuoto	$ A $	cardinalità
$\mathcal{P}(A)$	insieme delle parti	$ $	«tale che»