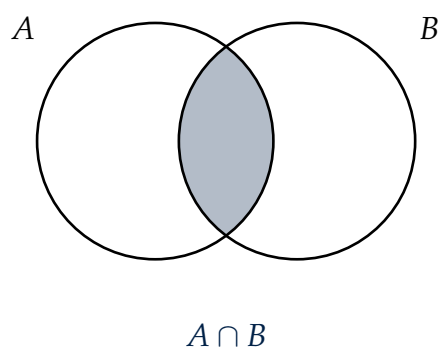


INSIEMI

ARITMETICA

Rappresentazioni, sottoinsiemi, operazioni,
diagrammi di Venn e problemi



Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Che cos'è un insieme	3
2.1	Gli insiemi numerici	4
3	Le tre rappresentazioni	5
3.1	La stessa proprietà, scritta in modi diversi	5
4	Insieme vuoto, insiemi finiti e infiniti	7
5	Sottoinsiemi	8
5.1	Uguaglianza di due insiemi	9
6	L'insieme delle parti	10
7	Unione e intersezione	11
7.1	Due casi da sapere a memoria	12
8	Le proprietà di unione e intersezione	13
9	Partizione di un insieme	14
10	Differenza di due insiemi	14
10.1	I casi particolari	15
11	Complementare e insieme universo	15
11.1	Le leggi di De Morgan	16
12	Prodotto cartesiano	17
13	Problemi con i diagrammi di Venn	18

1 Cosa serve prima di partire

Questo capitolo non chiede quasi nessun conto: chiede di imparare delle *scritture*. Ma le scritture parlano di numeri, e gli esercizi danno per scontato che quei numeri si sappiano riconoscere al volo.

Cosa devi già sapere

- **I quattro insiemi numerici.** $\mathbb{N}$ i naturali $0, 1, 2, 3, \dots$ (in questo libro lo zero è sempre dentro); $\mathbb{Z}$ gli interi, cioè i naturali più i negativi; $\mathbb{Q}$ i razionali, cioè tutto ciò che si scrive come frazione — compresi 5 e $-0,25$; $\mathbb{R}$ i reali, che aggiungono $\sqrt{2}$ e π . Ognuno contiene il precedente.
- **Divisori e multipli.** I divisori di 12 sono $1, 2, 3, 4, 6, 12$; i multipli di 3 sono $0, 3, 6, 9, \dots$. Metà degli esercizi descrive un insieme così, e chi si perde nell'elenco sbaglia l'esercizio pur avendo capito la teoria.
- **I numeri primi.** $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$: divisibili solo per 1 e per sé stessi. Il 1 non è primo.
- **Le potenze del 2.** $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32$. Servono all'insieme delle parti, e saperle a memoria fino a $2^6 = 64$ fa risparmiare tempo.

Se questi punti sono chiari, il resto del capitolo si legge di fila.

Esempio Svolto 1.1: Riscaldamento: quattro elenchi da saper scrivere:

1. I divisori di 36.

Si va a coppie, partendo da 1 : $1 \cdot 36, 2 \cdot 18, 3 \cdot 12, 4 \cdot 9, 6 \cdot 6$. Quindi **1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36**: nove divisori.

2. I multipli di 4 minori di 30.

0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28. Lo zero è multiplo di tutti.

3. I numeri primi minori di 20.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Il 2 è l'unico primo pari.

4. Dove sta $-\frac{7}{5}$?

È una frazione con il segno meno: non sta in $\mathbb{N}$, non sta in $\mathbb{Z}$, sta in $\mathbb{Q}$ — e quindi anche in $\mathbb{R}$.

2 Che cos'è un insieme

Un insieme non è semplicemente «un gruppo di cose». La differenza sta in una parola sola, e quella parola è **oggettivo**.

Consideriamo due raggruppamenti:

- «I numeri naturali maggiori di 2 e minori di 7.» Chiunque, in qualunque parte del mondo, sa dire quali sono: 3, 4, 5, 6. Nessuna discussione possibile.
- «I cinque film migliori della storia del cinema.» Ognuno di noi ne indicherebbe cinque diversi. Non c'è modo di stabilire chi ha ragione.

Il primo è un insieme, il secondo no. Non perché il secondo sia meno interessante, ma perché la matematica ha bisogno di poter rispondere *sì* o *no* alla domanda «questo oggetto ci sta dentro?».

Formula 2.1: Insieme, elemento, appartenenza: Un **insieme** è un raggruppamento di oggetti per cui esiste un **criterio oggettivo** che stabilisce se un qualunque oggetto fa parte o no del raggruppamento.

Ognuno degli oggetti di un insieme è un **elemento** dell'insieme, e si dice che gli **appartiene**.

$$x \in A \quad \text{«}x \text{ appartiene ad } A\text{»} \qquad x \notin A \quad \text{«}x \text{ non appartiene ad } A\text{»}$$

Gli insiemi si indicano con una **lettera maiuscola**, i loro elementi con una **minuscola**.

2.1 Gli insiemi numerici

Quattro insiemi tornano così spesso da avere un simbolo tutto loro:

- $\mathbb{N}$ i numeri naturali: 0, 1, 2, 3, ...
- $\mathbb{Z}$ gli interi: ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
- $\mathbb{Q}$ i razionali: tutto ciò che è una frazione
- $\mathbb{R}$ i reali: anche $\sqrt{2}$ e π

Esempio Svolto 2.1: Appartiene o no?:

1. -15 e $\mathbb{Z}$.

-15 è un intero negativo: $-15 \in \mathbb{Z}$.

2. $\sqrt{3}$ e $\mathbb{Q}$.

$\sqrt{3} = 1,7320508 \dots$ non si può scrivere come frazione: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Sta però in $\mathbb{R}$.

3. -12 e $\mathbb{N}$.

I naturali non hanno il segno meno: $-12 \notin \mathbb{N}$.

4. $\frac{4}{2}$ e $\mathbb{N}$.

Attenzione: $\frac{4}{2} = 2$, e 2 è un naturale. Quindi $\frac{4}{2} \in \mathbb{N}$. Conta il *numero*, non il modo in cui è scritto.

Controllo. Un numero che sta in $\mathbb{N}$ sta anche in $\mathbb{Z}$, in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{R}$: se una risposta dice « $\in \mathbb{N}$ ma $\notin \mathbb{Q}$ », è sbagliata di sicuro.

Errore tipico

Il punto 4 è la trappola più frequente di questa sezione. $\frac{4}{2}$, $\sqrt{9}$ e $(-2)^2$ sembrano tre cose «non naturali», e invece valgono 2, 3 e 4. **Prima si calcolà, poi si decide dove sta.**

3 Le tre rappresentazioni

Lo stesso insieme si può scrivere in tre modi. Non è un vezzo: ognuno serve a qualcosa di diverso, e gli esercizi chiedono di passare dall'uno all'altro in tutte le direzioni.

Formula 3.1: Le tre rappresentazioni:

- **Per elencazione:** si scrivono tutti gli elementi, fra parentesi graffe e separati da virgola.

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

- **Per proprietà caratteristica:** si scrive la proprietà che caratterizza gli elementi, con la barra $|$ che si legge «tale che».

$$P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\}$$

- **Con un diagramma di Eulero-Venn:** una linea chiusa, e dentro un puntino per ogni elemento.

Nell'elencazione e nel diagramma ogni elemento compare **una sola volta**, e l'**ordine non conta**: $\{1, 2, 3\}$ e $\{3, 1, 2\}$ sono lo stesso insieme.

	le vocali	i numeri pari
Proprietà caratteristica	$\{x \mid x \text{ è vocale}\}$	$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$
Elencazione	$V = \{a, e, i, o, u\}$	$P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$
Diagramma	$V \quad \begin{array}{c} \text{a} \quad e \\ \quad \quad i \\ o \quad u \end{array}$	$P \quad \begin{array}{c} 0 \quad 2 \\ \quad \quad 4 \\ 6 \quad \dots \end{array}$

3.1 La stessa proprietà, scritta in modi diversi

Una proprietà caratteristica non è unica. L'insieme dei multipli di 6 si può descrivere in almeno due modi:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di 2 e di 3}\} \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è divisibile per 6}\}$$

A e B sono lo **stesso insieme**, scritto con due proprietà diverse. Quando un esercizio chiede la proprietà caratteristica, una risposta diversa dalla soluzione del libro può essere ugualmente giusta: si controlla elencando.

Esempio Svolto 3.1: Dalle parole all'elencazione, e ritorno:

1. Le lettere della parola «attaccapanni».

Si scorre la parola e si prende ogni lettera *nuova*: a, t, t, a, c, c, a, p, a, n, n, i. Le lettere diverse sono

$$\{a, t, c, p, n, i\}$$

Sei elementi, non dodici: le ripetizioni non si scrivono.

2. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è divisore di } 20\}$.

Le coppie: $1 \cdot 20, 2 \cdot 10, 4 \cdot 5$. Quindi $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

3. Dall'elencazione alla proprietà: $A = \{5, 7, 11, 13, 17\}$.

Sono tutti primi, e stanno fra 5 e 17:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è primo e } 5 \leq x \leq 17\}$$

Va bene anche $4 < x < 18$: è la stessa condizione scritta altrimenti.

Controllo. Si rilegge la proprietà e si rifà l'elenco: deve tornare identico a quello di partenza, senza elementi in più. Se avessimo scritto solo « x è primo», l'elenco sarebbe stato infinito.

Metodo 3.1: Scrivere la proprietà caratteristica:

1. Guardo l'elenco e cerco **che cosa hanno in comune** gli elementi: pari, primi, divisori di qualcosa, quadrati.
2. Cerco **dove si fermano**: c'è un più grande? un più piccolo? Quella è la seconda condizione.
3. Scrivo l'insieme di partenza ($x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}, \dots$), la barra, e le condizioni.
4. **Rifaccio l'elenco** dalla proprietà appena scritta e lo confronto con quello dato.

Errore tipico

Scrivere $\{x \mid x > 3\}$ senza dire da dove si pesca. I numeri maggiori di 3 in $\mathbb{N}$ sono $4, 5, 6, \dots$; in $\mathbb{R}$ sono infiniti e comprendono $3,5$ e π . **L'insieme di partenza va sempre dichiarato.**

4 Insieme vuoto, insiemi finiti e infiniti

Formula 4.1: Insieme vuoto: L'insieme che **non ha elementi** si chiama **insieme vuoto** e si indica con $\emptyset$.

Esiste un **solo** insieme vuoto: due insiemi senza elementi hanno esattamente gli stessi elementi (nessuno), quindi sono lo stesso insieme.

Sono insiemi vuoti: «i quadrati con angoli acuti», «i numeri dispari divisibili per 4», «i poligoni con meno di tre lati». In tutti e tre i casi il criterio è oggettivo — quindi è un insieme — ma non lo soddisfa nessuno.

Formula 4.2: Insiemi finiti e infiniti, cardinalità: Un insieme è **finito** se i suoi elementi sono in numero finito, **infinito** altrimenti.

Se A è finito, il numero dei suoi elementi si chiama **cardinalità** di A e si indica con $|A|$.

$$V = \{a, e, i, o, u\} \implies |V| = 5 \qquad |\emptyset| = 0$$

L'insieme vuoto è finito: ha zero elementi.

Esempio Svolto 4.1: Vuoto, finito o infinito?:

1. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è dispari e divisibile per } 4\}$.

Un numero divisibile per 4 è pari. Dispari e pari insieme non si può: $\emptyset$.

2. $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 1\}$.

Fra 0 e 1 non ci sono naturali: $\emptyset$. Attenzione: in $\mathbb{Q}$ lo stesso insieme sarebbe *infinito*.

3. $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$.

Da -4 a 4 : **9** elementi, finito.

4. **I multipli di 3.**

$0, 3, 6, 9, \dots$: non finiscono mai, **infinito**.

Controllo. Nel punto 3 conviene contare così: dai negativi ai positivi ci sono $4 + 4 = 8$ numeri, più lo zero fa 9. Contare a uno a uno « $-4, -3, \dots$ » porta quasi sempre a dimenticare lo zero.

Errore tipico

$\emptyset$ e $\{\emptyset\}$ **non sono la stessa cosa**. Il primo non ha elementi, il secondo ne ha *uno* — e quell'elemento è l'insieme vuoto. Quindi $|\emptyset| = 0$ ma $|\{\emptyset\}| = 1$.

Allo stesso modo $\{0\}$ non è l'insieme vuoto: contiene il numero zero.

Insiemi infiniti: la sorpresa di Galileo

Un insieme infinito ha più elementi di un suo sottoinsieme proprio? Sembra ovvio di sì, e invece no.

Galileo, nel 1638, confrontò i numeri $1, 2, 3, 4, \dots$ con i loro quadrati $1, 4, 9, 16, \dots$. I secondi sono «solo alcuni» dei primi, eppure a ogni numero corrisponde un quadrato e a ogni quadrato un numero: sono in **corrispondenza biunivoca**, e quindi sono tanti quanti. Galileo concluse che «uguale, maggiore e minore» non valgono per gli infiniti.

Due secoli dopo Cantor mostrò che anche i razionali sono tanti quanti i naturali — si ordinano in una tabella e si contano in diagonale — mentre i *reali* sono di più: $\mathbb{R}$ non è numerabile. Non serve per la verifica; serve a sapere che la domanda ha una risposta.

5 Sottoinsiemi

Consideriamo l'insieme S degli strumenti musicali e l'insieme A degli archi. Tutti gli elementi di A sono anche elementi di S : si dice che A è un sottoinsieme di S .

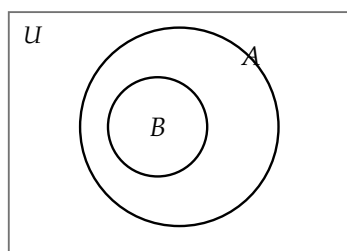
Formula 5.1: Inclusione: Se **ogni** elemento di B appartiene ad A , si dice che B è **sottoinsieme** di A , o che B è **incluso** in A :

$$B \subseteq A$$

Se inoltre **almeno un** elemento di A non appartiene a B , si dice che B è incluso **strettamente**:

$$B \subset A$$

Il simbolo $\not\subseteq$ dice che un insieme *non* è sottoinsieme di un altro.



$B \subset A$ perché $B \subseteq A$
e c'è almeno un elemento di A
che non sta in B .

Formula 5.2: Sottoinsiemi propri e impropri: Per ogni insieme A valgono sempre:

$$A \subseteq A \qquad \emptyset \subseteq A$$

A stesso e $\emptyset$ si dicono **sottoinsiemi impropri** di A . Tutti gli altri si dicono **sottoinsiemi propri**.

5.1 Uguaglianza di due insiemi

Formula 5.3: Doppia inclusione: Due insiemi A e B sono **uguali** se hanno gli stessi elementi:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$

È il modo con cui si dimostra che due insiemi scritti in modi diversi sono lo stesso insieme: si fa vedere che ognuno è contenuto nell'altro.

Esempio Svolto 5.1: Sottoinsieme, propriamente o no: Sia $H = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 8\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3n + 1, 1 \leq n \leq 4\}$.

Con $n = 1, 2, 3, 4$ viene $A = \{4, 7, 10, 13\}$. Ma $10 \notin H$: $A \not\subseteq H$.

2. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è divisore di } 15\}$.

$B = \{1, 3, 5, 15\}$. Né 1 né 15 stanno in H : $B \not\subseteq H$.

3. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 4\}$.

In $\mathbb{N}$ l'unica soluzione è 2, quindi $C = \{2\}$, e $2 \in H$: $C \subseteq H$, ed è proprio perché H ha altri elementi.

Controllo. Per smentire un'inclusione basta **un** controesempio: nel punto 1 il numero 10 chiude la questione, senza guardare gli altri.

Metodo 5.1: Stabilire se $B \subseteq A$:

1. Elenco gli elementi di B .
2. Prendo il primo e controllo se sta in A . Se non ci sta, ho finito: $B \not\subseteq A$.
3. Se ci sta, passo al successivo, fino all'ultimo.
4. Se tutti ci stanno: $B \subseteq A$. Per sapere se l'inclusione è *stretta* guardo se A ha qualche elemento in più.

Errore tipico

I due errori più diffusi del capitolo, e stanno tutti e due qui.

Primo: confondere $\in$ con $\subset$. A sinistra di $\in$ ci va un *elemento*, a sinistra di $\subset$ ci va un *insieme*. Dato $A = \{4, 6\}$:

$$6 \in A \text{ giusto} \quad \{6\} \in A \text{ sbagliato} \quad \{6\} \subset A \text{ giusto}$$

Secondo: scrivere $A \subset A$. L'inclusione stretta esclude l'uguaglianza, e A non ha elementi che non stiano in A . Vero è $A \subseteq A$.

6 L'insieme delle parti

Scriviamo tutti i sottoinsiemi di $A = \{a, b, c\}$:

- con un solo elemento: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$;
- con due elementi: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$;
- gli impropri: A e $\emptyset$.

In tutto **otto**. E $8 = 2^3$, dove 3 è il numero di elementi di A . Non è un caso.

Formula 6.1: Insieme delle parti: L'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ di un insieme A è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A .

$$A = \{a, b, c\} \implies \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

Se A è finito e ha n elementi, allora

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

Perché proprio 2^n

Per costruire un sottoinsieme si decide, per ogni elemento, se prenderlo o no: due possibilità a testa, indipendenti l'una dall'altra. Con n elementi le decisioni sono n , e le combinazioni $2 \cdot 2 \cdots 2$ (n volte), cioè 2^n . Prendendo «no» ogni volta si ottiene $\emptyset$; prendendo «sì» ogni volta si ottiene A .

Esempio Svolto 6.1: Due insiemi delle parti:

1. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$.

$B = \{0, 1, 2\}$, quindi $|B| = 3$ e i sottoinsiemi sono $2^3 = 8$:

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

2. $\mathcal{P}(\emptyset)$.

L'insieme vuoto ha un solo sottoinsieme: sé stesso. Quindi

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

e ha *un* elemento, non zero. Torna con la formula: $2^0 = 1$.

Controllo. Nel punto 1 si contano gli otto sottoinsiemi elencati: uno vuoto, tre da un elemento, tre da due, uno da tre. $1 + 3 + 3 + 1 = 8$, e la formula dà $2^3 = 8$.

Metodo 6.1: Elencare $\mathcal{P}(A)$ senza dimenticarne nessuno:

1. Scrivo $\emptyset$.
2. Scrivo tutti i sottoinsiemi con **un** elemento.
3. Poi quelli con **due**, poi con **tre**, e così via.
4. Chiudo con A stesso.
5. **Conto**: devono essere 2^n . Se non tornano, ne manca qualcuno in uno dei gruppi di mezzo.

Errore tipico

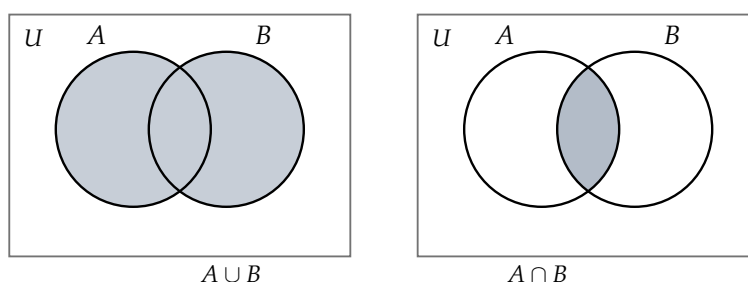
$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, **non** $2n$ e non n^2 . Con $|A| = 5$ i sottoinsiemi sono 32, non 10 e non 25. Il modo per non sbagliare: controllare la formula su $A = \{a, b, c\}$, dove i sottoinsiemi si contano a mano e sono otto — $2 \cdot 3 = 6$ e $3^2 = 9$ non tornano, $2^3 = 8$ sì.

7 Unione e intersezione

Formula 7.1: Unione e intersezione: Dati gli insiemi A e B :

- l'**unione** $A \cup B$ è l'insieme degli elementi che appartengono ad A **o** a B ;
- l'**intersezione** $A \cap B$ è l'insieme degli elementi che appartengono ad A **e** a B .

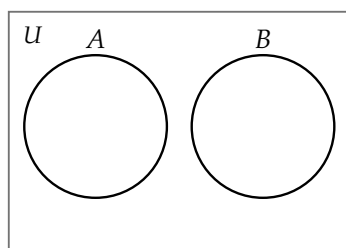
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\} \quad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



L'«o» dell'unione è quello della matematica, non quello della lingua parlata: è **inclusivo**, cioè comprende anche gli elementi che stanno in tutti e due gli insiemi. In $A \cup B$ non c'è «o l'uno o l'altro»: c'è «almeno uno dei due».

Formula 7.2: Insiemi disgiunti: Se due insiemi non hanno elementi in comune, la loro intersezione è l'insieme vuoto e si dicono **disgiunti**:

$$A \cap B = \emptyset$$



L'insieme S degli studenti sufficienti in matematica e l'insieme I degli insufficienti sono disgiunti: $S \cap I = \emptyset$.

Esempio Svolto 7.1: Unione e intersezione, con il diagramma: Siano, fra i numeri naturali minori di 10, A i multipli di 2 e B i multipli di 3.

1. Elencare.

$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{0, 3, 6, 9\}$.

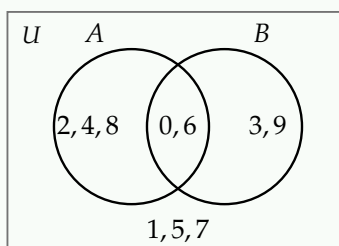
2. L'intersezione: chi sta in tutti e due.

Lo 0 e il 6: $A \cap B = \{0, 6\}$. Sono i multipli di 6.

3. L'unione: tutti, una volta sola.

$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Lo 0 e il 6 si scrivono una volta, non due.

4. Il diagramma.



Controllo con le cardinalità. $|A| = 5$, $|B| = 4$, $|A \cap B| = 2$. Allora $|A \cup B|$ deve fare $5 + 4 - 2 = 7$, e l'elenco del punto 3 ha proprio 7 elementi.

Metodo 7.1: Riempire un diagramma di Venn a due insiemi:

1. Scrivo per primi gli elementi dell'**intersezione**, nella zona centrale.
2. Metto nella parte di sinistra gli elementi di A rimasti.
3. Metto nella parte di destra gli elementi di B rimasti.
4. Se c'è un universo, fuori dai cerchi ci va tutto il resto.

Si parte sempre dal centro: partendo dai bordi, gli elementi comuni finiscono scritti due volte.

7.1 Due casi da sapere a memoria

Se $B \subseteq A$, allora tutto ciò che sta in B sta già in A :

$$A \cup B = A$$

$$A \cap B = B$$

E con l'insieme vuoto:

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

8 Le proprietà di unione e intersezione

Come le operazioni fra numeri, anche quelle fra insiemi hanno delle proprietà.

Formula 8.1: Le proprietà:

$$\text{Commutativa} \quad A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$$

$$\text{Associativa} \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$\text{Distributiva} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

La distributiva vale nei **due versi**, ed è la differenza rispetto ai numeri: lì la moltiplicazione si distribuisce sull'addizione, ma l'addizione non si distribuisce sulla moltiplicazione. Qui sì.

Esempio Svolto 8.1: Verificare la distributiva su un caso: Siano $A = \{2, 6, 8, 10, 30\}$, $B = \{3, 6, 9, 15, 30\}$, $C = \{5, 10, 15, 25, 30\}$. Verifichiamo che $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1. Il primo membro.

$B \cup C = \{3, 5, 6, 9, 10, 15, 25, 30\}$; incrociando con A :

$$A \cap (B \cup C) = \{6, 10, 30\}$$

2. Il secondo membro.

$A \cap B = \{6, 30\}$ e $A \cap C = \{10, 30\}$; unendo:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{6, 10, 30\}$$

3. Confronto.

I due insiemi hanno gli stessi elementi: la proprietà è verificata.

Controllo. I due membri vanno calcolati **separatamente** e confrontati alla fine. Chi calcola il primo e poi «riscrive» il secondo non sta verificando niente: sta ricopiando.

Errore tipico

Nelle espressioni le **parentesi contano**. $A \cup (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cap C$ non sono la stessa cosa: nel caso qui sopra la prima dà $\{2, 6, 8, 10, 30\}$ e la seconda $\{5, 10, 15, 25, 30\}$ intersecato con l'unione, cioè $\{10, 30\}$. Non esiste una precedenza fra $\cup$ e $\cap$ come fra $\times$ e $+$: senza parentesi la scrittura è ambigua, e va segnalata come errore.

9 Partizione di un insieme

Consideriamo l'insieme L delle lettere dell'alfabeto italiano, e i due sottoinsiemi V delle vocali e C delle consonanti. Succedono tre cose: la loro unione dà L ; sono disgiunti; nessuno dei due è vuoto. Si dice allora che V e C formano una **partizione** di L .

Formula 9.1: Partizione: Una **partizione** di un insieme A è un insieme di sottoinsiemi di A tale che:

1. l'**unione** dei sottoinsiemi è A (non avanza niente);
2. i sottoinsiemi sono **disgiunti** a due a due (non si sovrappongono);
3. **nessun** sottoinsieme è vuoto.

Una partizione serve a fare *classificazioni*: dividere un insieme in gruppi di elementi che hanno la stessa proprietà, senza lasciare fuori nessuno e senza metterne uno in due gruppi.

Esempio Svolto 9.1: Tre candidate, una sola passa: Sia $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\} = \{0, 1, \dots, 10\}$. Quali fra queste sono partizioni di A ?

1. $\{\{0, 1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{9, 10\}\}$.

Unione: tutti gli undici numeri, e nessuna sovrapposizione. Nessuno è vuoto. È una partizione: sì.

2. $\{\{0, 2, 4\}, \{4, 6, 8\}, \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}\}$.

Il 4 sta in due gruppi: **no**, non sono disgiunti.

3. $\{\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \{1, 3, 5, 7\}\}$.

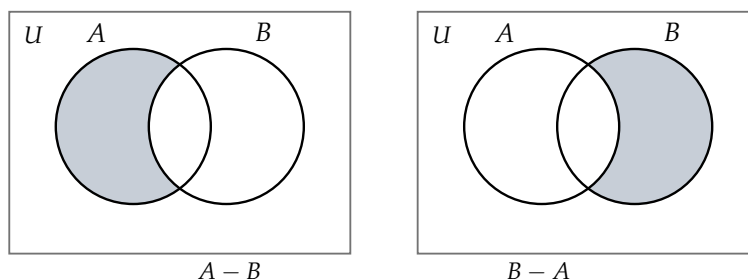
Manca il 9: l'unione non dà A . **no**.

Controllo con le cardinalità. Se i gruppi sono disgiunti, la somma delle loro cardinalità deve fare $|A| = 11$. Nel punto 1: $5 + 4 + 2 = 11$, torna. Nel punto 2: $3 + 3 + 6 = 12 > 11$, c'è una sovrapposizione. Nel punto 3: $6 + 4 = 10 < 11$, manca qualcosa. Il conto trova l'errore prima ancora di cercarlo.

10 Differenza di due insiemi

Formula 10.1: Differenza: Dati gli insiemi A e B , la **differenza** $A - B$ è l'insieme degli elementi che appartengono ad A ma **non** a B :

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



I due disegni non si somigliano, e non devono: al contrario dell'unione e dell'intersezione, la differenza non è commutativa.

Esempio Svolto 10.1: $A - B$ e $B - A$, affiancate: Siano $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$.

1. $A - B$: sto in A , tolgo chi sta anche in B .

Da A tolgo 1 e 3: resta $A - B = \{2, 4\}$.

2. $B - A$: parto da B .

Da B tolgo 1 e 3: resta $B - A = \{5\}$.

3. Confronto.

$\{2, 4\}$ e $\{5\}$ non hanno nemmeno un elemento in comune. L'ordine in cui si scrive la differenza cambia tutto.

Controllo. Gli elementi di $A - B$, di $B - A$ e di $A \cap B$ presi insieme devono ricostruire $A \cup B$: $\{2, 4\} \cup \{5\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, che è proprio $A \cup B$. Queste tre parti formano sempre una partizione di $A \cup B$ (quando nessuna è vuota).

10.1 I casi particolari

$$A \subseteq B \implies A - B = \emptyset$$

non c'è nessun elemento di A fuori da B

$$A \cap B = \emptyset \implies A - B = A$$

non c'è niente da togliere

$$A - A = \emptyset \quad A - \emptyset = A \quad \emptyset - A = \emptyset$$

Errore tipico

Scrivere $A - B$ quando l'esercizio chiede $B - A$. È l'errore più costoso della sezione perché il conto è giusto: sbagliato è l'ordine. Il modo per non farlo: leggere sempre «**parto da...**» invece di «**differenza fra...**». In $B - A$ si parte da B .

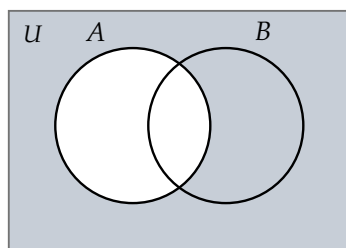
11 Complementare e insieme universo

La differenza fra un insieme e un suo *sottoinsieme* ha un nome tutto suo.

Formula 11.1: Insieme complementare: Dati gli insiemi A e B con $B \subseteq A$, l'insieme complementare di B rispetto ad A è

$$\overline{B}_A = A - B$$

Spesso gli insiemi di un problema sono tutti sottoinsiemi di uno stesso insieme più ampio, che si chiama **insieme universo** e si indica con U . In quel caso il complementare si scrive senza pedice, $\overline{A}$.



$\overline{A}$ è tutto quello che sta *nell'universo* ma fuori da A . Senza dichiarare U , la scrittura non ha significato.

Se A non è vuoto:

$$\overline{A}_A = \emptyset \quad (\text{perché } A - A = \emptyset)$$

$$\overline{\emptyset}_A = A \quad (\text{perché } A - \emptyset = A)$$

Esempio Svolto 11.1: La pizza capricciosa: Siano M e C gli ingredienti della margherita e della capricciosa:

$$M = \{\text{pomodoro, mozzarella}\}$$

$$C = \{\text{pomodoro, mozzarella, funghi, carciofi, prosciutto, olive}\}$$

1. Controllo l'inclusione.

Ogni ingrediente della margherita sta nella capricciosa: $M \subset C$. Quindi il complementare si può fare.

2. Calcolo.

$$\overline{M}_C = C - M = \{\text{funghi, carciofi, prosciutto, olive}\}$$

Sono gli ingredienti che la capricciosa ha *in più*.

Controllo. $|M| + |\overline{M}_C| = 2 + 4 = 6 = |C|$. Un insieme e il suo complementare, messi insieme, devono ridare tutto l'insieme di riferimento e niente di più.

11.1 Le leggi di De Morgan

Due formule dicono che cosa succede al complementare di un'unione e di un'intersezione. Sono le più usate del capitolo, e tornano in logica.

Formula 11.2: Leggi di De Morgan: Dati due sottoinsiemi A e B di un universo U :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

A parole: *non stare in nessuno dei due* è come *stare fuori dal primo e fuori dal secondo*; *non stare in tutti e due* è come *stare fuori da almeno uno*. Il complementare scambia $\cup$ con $\cap$.

Esempio Svolto 11.2: De Morgan verificata su un caso: Sia $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

1. Primo membro.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, quindi $\overline{A \cup B} = \{7, 8\}$.

2. Secondo membro.

$\overline{A} = \{5, 6, 7, 8\}$ e $\overline{B} = \{1, 2, 7, 8\}$, quindi $\overline{A} \cap \overline{B} = \{7, 8\}$.

3. Tornano. La prima legge è verificata.

Controllo con l'altra legge. $A \cap B = \{3, 4\}$, quindi $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$; e $\overline{A} \cup \overline{B} = \{5, 6, 7, 8\} \cup \{1, 2, 7, 8\} = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$. Torna anche la seconda.

Errore tipico

Scrivere $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: il simbolo **si scambia**, non resta uguale. Nel caso qui sopra $\overline{A \cup B} = \{7, 8\}$, mentre $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$: non si somigliano nemmeno.

E prima ancora: **un complementare senza universo non esiste**. «Il complementare dei numeri pari» non vuol dire niente finché non si dice se $U = \mathbb{N}$ o $U = \mathbb{Z}$ — nel secondo caso ci sta dentro anche -3 .

12 Prodotto cartesiano

Vogliamo scrivere tutti i numeri di due cifre che hanno la decina in $A = \{4, 5, 6\}$ e l'unità in $B = \{1, 2\}$. Servono tutti gli *abbinamenti* possibili fra un elemento di A e uno di B : è il prodotto cartesiano.

Formula 12.1: Prodotto cartesiano: Dati gli insiemi A e B , il **prodotto cartesiano** $A \times B$ è l'insieme delle **coppie ordinate** $(a; b)$ con $a \in A$ e $b \in B$:

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

In una coppia *ordinata* l'ordine conta: $(5; 2)$ e $(2; 5)$ sono coppie diverse.

Formula 12.2: Due proprietà:

$$A \times B \neq B \times A \quad \text{se } A \neq B$$

cioè il prodotto cartesiano **non è commutativo**. L'unico caso in cui $A \times B = B \times A$ è $A = B$.

Per la cardinalità invece vale sempre

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B|$$

Esempio Svolto 12.1: I numeri di due cifre: Siano $A = \{4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2\}$.

1. Il prodotto, con ordine.

Si parte dal primo elemento di A e si accoppia con tutti quelli di B , poi si passa al secondo:

$$A \times B = \{(4; 1), (4; 2), (5; 1), (5; 2), (6; 1), (6; 2)\}$$

2. La risposta al problema.

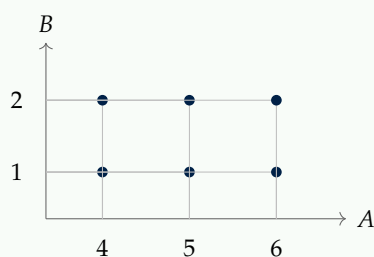
Ogni coppia è un numero: **41, 42, 51, 52, 61, 62.**

3. E $B \times A$?

$$B \times A = \{(1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 4), (2; 5), (2; 6)\}$$

Nessuna di queste coppie sta in $A \times B$: sono insiemi diversi, pur avendo la stessa cardinalità.

4. Il diagramma cartesiano.



Controllo. $|A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$, e le coppie elencate sono sei. Se ne vengono cinque, ne è stata dimenticata una: si rifà l'elenco tenendo *fisso* il primo elemento e facendo scorrere il secondo.

Metodo 12.1: Elencare $A \times B$ senza perdere coppie:

1. Prendo il **primo** elemento di A e lo abbinò, uno alla volta, a *tutti* gli elementi di B .
2. Passo al secondo elemento di A e ripeto.
3. Vado avanti fino a esaurire A .
4. Conto: devono essere $|A| \cdot |B|$.

13 Problemi con i diagrammi di Venn

Qui gli insiemi smettono di essere un esercizio di notazione e diventano uno strumento: sono il modo più veloce di rispondere a domande del tipo «quanti fanno l'una e l'altra cosa?».

L'idea è che i numeri scritti nel diagramma **non sono elementi, sono quantità**: in ogni regione si scrive *quanti* ce ne stanno.

Formula 13.1: La formula delle due cardinalità: Per due insiemi finiti qualunque:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Si sottrae l'intersezione perché sommando $|A|$ e $|B|$ gli elementi comuni vengono contati **due volte**.

Esempio Svolto 13.1: Portatile e tablet: Gli studenti che prendono appunti in digitale sono 224. Di questi, 123 usano il portatile e 149 il tablet. Quanti usano tutti e due? Quanti solo il portatile? Quanti solo il tablet?

1. Do un nome agli insiemi.

C = usano il computer portatile, T = usano il tablet. $|C| = 123$, $|T| = 149$, $|C \cup T| = 224$.

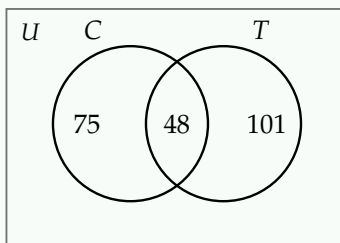
2. Trovo l'intersezione.

$123 + 149 = 272$, che è più di 224: la differenza sono quelli contati due volte.

$$|C \cap T| = 272 - 224 = 48$$

3. Riempio il diagramma partendo dal centro.

Solo portatile: $123 - 48 = 75$. Solo tablet: $149 - 48 = 101$.



Controllo. $75 + 48 + 101 = 224$: le tre regioni ricostruiscono il totale. Se non torna, l'errore è nel punto 2.

Metodo 13.1: Risolvere un problema con i diagrammi di Venn:

1. Do un nome a ogni insieme e scrivo l'universo U .
2. Traduco ogni frase del testo in una **cardinalità**: «11 iscritti a fisica» diventa $|F| = 11$; «3 a fisica e a danza» diventa $|F \cap D| = 3$.
3. Riempio il diagramma partendo dalla regione **più interna** — con tre insiemi è $A \cap B \cap C$ — e vado verso l'esterno sottraendo.
4. Rispondo alla domanda leggendo le regioni giuste.

5. **Controllo:** la somma di tutte le regioni, più quelli fuori, deve dare $|U|$.

Il passo 3 è tutto: partendo da fuori si sottrae sempre qualcosa di sbagliato.

Esempio Svolto 13.2: Tre attività: fisica, danza, teatro: In una classe di 27 studenti: 11 sono iscritti a fisica, 10 a danza, 13 a teatro; 3 a fisica e danza, 3 a fisica e teatro ma non a danza, 4 a danza e teatro ma non a fisica, 2 a fisica e danza ma non a teatro. Quanti non fanno nessuna attività?

1. La regione centrale.

A fisica e danza sono 3; di questi, 2 non fanno teatro. Quindi chi fa tutte e tre è $3 - 2 = 1$.

2. Le regioni a due a due.

Fisica e danza ma non teatro: 2. Fisica e teatro ma non danza: 3. Danza e teatro ma non fisica: 4.

3. Le regioni singole.

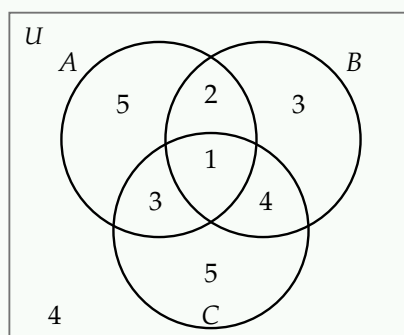
Solo fisica: $11 - (2 + 1 + 3) = 5$.

Solo danza: $10 - (2 + 1 + 4) = 3$.

Solo teatro: $13 - (3 + 1 + 4) = 5$.

4. Chi resta fuori.

$$27 - (5 + 2 + 3 + 3 + 1 + 4 + 5) = 27 - 23 = 4$$



Controllo. Si risale: chi fa fisica deve essere $5 + 2 + 3 + 1 = 11$, e il testo dice 11. Chi fa danza: $3 + 2 + 4 + 1 = 10$, e il testo dice 10. Chi fa teatro: $5 + 3 + 4 + 1 = 13$, e il testo dice 13. Tutti e tre i dati di partenza tornano, quindi il diagramma è riempito bene.

Errore tipico

Sommare i dati e basta. Nel problema del portatile, $123 + 149 = 272$ non è il numero degli studenti: è il numero delle *iscrizioni*, e chi usa tutti e due gli strumenti è stato contato due volte. Il numero delle persone è 224, ed è dato.

Il secondo errore è leggere «3 a fisica e a danza» come «3 fanno *solo* fisica e danza». Sono due frasi diverse: la prima comprende anche chi fa pure teatro, e nel problema qui sopra la distinzione cambia il risultato di ogni regione.

Indice analitico

Appartenenza, 3

Cardinalità, 7

Coppia ordinata, 17

Diagramma cartesiano, 17

Diagramma di Venn, 5

Differenza di insiemi, 14

Elemento, 3

Elencazione, 5

Inclusione, 8

Inclusione-esclusione, 18

Insieme, 3

Insieme complementare, 15

Insieme delle parti, 10

Insieme finito, 7

Insieme infinito, 7

Insieme universo, 15

Insieme vuoto, 7

Insiemi disgiunti, 11

Insiemi numerici, 4

Intersezione, 11

Leggi di De Morgan, 15

Partizione, 14

Problemi con gli insiemi, 18

Prodotto cartesiano, 17

Proprietà associativa, 13

Proprietà caratteristica, 5

Proprietà commutativa, 13

Proprietà distributiva, 13

Sottoinsieme, 8

Sottoinsieme improprio, 8

Sottoinsieme proprio, 8

Uguaglianza di insiemi, 9

Unione, 11