

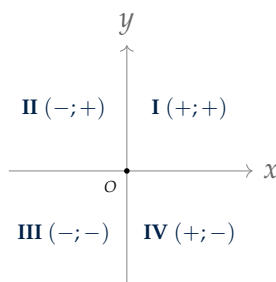
FORMULARIO: IL PIANO CARTESIANO

In ogni riquadro: la formula con le sue condizioni e un esempio con i numeri.

1 Dove sta un punto

1.1 Quadranti

I	(+; +)
II	(-; +)
III	(-; -)
IV	(+; -)



ESEMPIO

Si numerano in senso **antiorario** da in alto a destra. Un punto con una coordinata nulla non sta in nessun quadrante: sta su un asse.

1.2 Assi e bisettrici

asse x	$y = 0, P(x; 0)$
asse y	$x = 0, P(0; y)$
bisettrice I e III	$y = x, P(k; k)$
bisettrice II e IV	$y = -x, P(k; -k)$

ESEMPIO

Prima bisettrice: coordinate **uguali**, $(3; 3)$. Seconda: coordinate **opposte**, $(-2; 2)$.

2 Il traduttore

A colpo d'occhio

Quello che dice il testo	Quello che scrivi
«sta sull'asse x »	$y = 0 \rightarrow P(x; 0)$
«sta sull'asse y »	$x = 0 \rightarrow P(0; y)$
«l'ascissa è doppia dell'ordinata»	$x = 2y \rightarrow P(2y; y)$
«l'ordinata supera l'ascissa di 3»	$y = x + 3$
«la somma delle coordinate è 5»	$x + y = 5 \rightarrow y = 5 - x$
«dista 4 dall'asse x »	$ y = 4 \rightarrow y = \pm 4$
«dista 2 dall'asse y »	$ x = 2 \rightarrow x = \pm 2$
« x_A è tripla di x_B »	$x_A = 3x_B$
«sta sulla bisettrice del I e III»	$y = x \rightarrow P(k; k)$

Tradurre serve a ridurre le incognite: un punto sulla bisettrice non ne ha due, ne ha una.

2.1 «Supera di 3»: da che parte va il più

«L'ordinata supera l'ascissa di 3» $\rightarrow y = x + 3$. Il $+3$ sta dalla parte del **più piccolo**.

ESEMPIO

Il controllo: se $x = 1$, l'ordinata deve valere 4. $y = x + 3$ dà 4 ✓; $x = y + 3$ darebbe -2 .

2.2 La distanza da un asse dà DUE risposte

«Dista 4 dall'asse x » è $|y| = 4$, cioè $y = 4$ oppure $y = -4$.

ESEMPIO

Sopra e sotto l'asse ci sono due rette che distano 4. Chi ne scrive una sola perde metà delle soluzioni e non se ne accorge.

3 Distanza

3.1 I casi facili, e dall'origine

Stessa **ordinata** (segmento orizzontale):

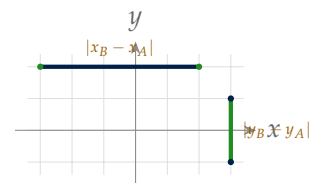
$$\overline{AB} = |x_B - x_A|$$

Stessa **ascissa** (segmento verticale):

$$\overline{AB} = |y_B - y_A|$$

Dall'**origine**:

$$\overline{OP} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$$



ESEMPIO

$$A(-4;2), B(3;2): |3 - (-4)| = 7.$$

$$A(-2;2), B(-2;-1): |-1 - 2| = 3.$$

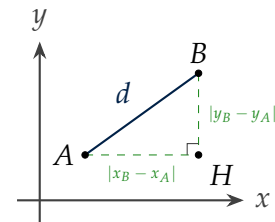
$$P(-6;8): \sqrt{36 + 64} = 10.$$

Non sono formule nuove: sono la generale con un cateto nullo, o con A nell'origine. Ma guardare le coordinate *prima* risparmia metà del lavoro.

3.2 Fra due punti

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

È il teorema di Pitagora: i cateti sono le differenze delle coordinate.

**ESEMPIO**

$$A(1;1), B(5;4): \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

$$C(-2;3), D(3;-2): \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ — non } 7,07.$$

3.3 All'indietro: la coordinata mancante

Si eleva al quadrato:

$$d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

ESEMPIO

$$A(1;2), B(4;y), \overline{AB} = 5: (y - 2)^2 = 16, \text{ quindi } y = 6 \text{ oppure } y = -2.$$

Le soluzioni sono **due**: una distanza non sa da che parte sta il punto.

4 Punto medio e baricentro**4.1 Da dove vengono: Talete, e il rapporto 2 : 1**

Punto medio. Proiettando A, M, B sull'asse x , da $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ segue per Talete $\overline{A'M'} \cong \overline{M'B'}$, cioè $x_M - x_A = x_B - x_M$, da cui $2x_M = x_A + x_B$.

Baricentro. Il baricentro divide ogni mediana con $\overline{CG} \cong 2\overline{GM}$. Proiettando, $x_C - x_G = 2(x_G - x_M)$, quindi $3x_G = x_C + 2x_M$; sostituendo $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ si ottiene la media delle tre.

ESEMPIO

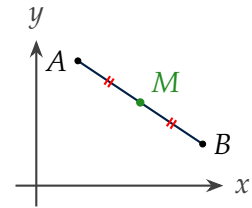
La formula del baricentro **contiene** quella del punto medio: non sono due formule da imparare, è una sola applicata due volte.

Se la formula ti scappa, ricostruiscila dal rapporto 2 : 1: il baricentro sta a $\frac{1}{3}$ della mediana partendo dal lato.

4.2 Punto medio: diretta e inversa

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$x_B = 2x_M - x_A \quad y_B = 2y_M - y_A$$



ESEMPIO

$A(2;1), B(6;-3) \rightarrow M(4;-1)$. E da A e M: $x_B = 8 - 2 = 6, y_B = -2 - 1 = -3 \checkmark$

4.3 È una media: c'è un PIÙ

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$. Scriverci un meno è l'errore più diffuso del capitolo.

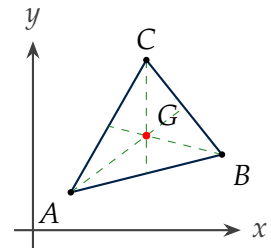
ESEMPIO

Il controllo senza disegnare: il punto medio deve stare **fra** i due estremi. Se non ci sta, è sbagliato.

4.4 Baricentro: diretta e inversa

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

$$x_C = 3x_G - (x_A + x_B) \quad y_C = 3y_G - (y_A + y_B)$$



ESEMPIO

$A(2;1), B(6;-3), C(-7;0) \rightarrow G(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$.

Coordinate frazionarie: normale, si divide per tre.

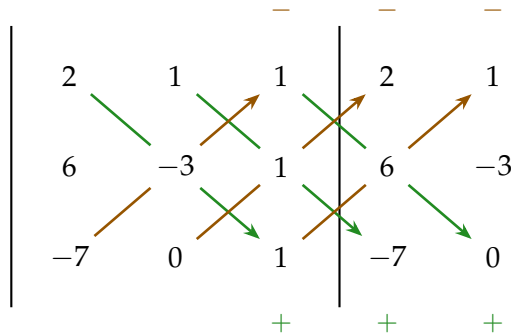
5 Aree

5.1 Col determinante

$$T = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det T|$$

ESEMPIO

$A(2;1), B(6;-3), C(-7;0)$. Con Sarrus: si ricopiano a destra le prime due colonne, **si sommano** le diagonali che scendono e **si sottraggono** quelle che salgono.



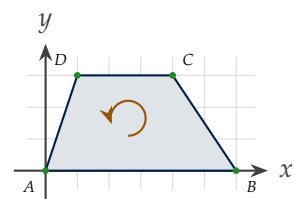
$$D_+ = -6 - 7 + 0 = -13, \quad D_- = 21 + 0 + 6 = 27, \quad \det T = -40 \text{ e } \mathcal{A} = \frac{1}{2} |-40| = 20.$$

Il valore assoluto serve perché il determinante cambia segno se si scambiano due vertici.

5.2 Gauss: l'area di un poligono qualunque

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|$$

I vertici vanno scritti **in ordine lungo il perimetro**, e dopo l'ultimo si torna al primo. Per $n = 3$ è il determinante.



ESEMPIO

$A(0;0), B(6;0), C(4;3), D(1;3)$:

$$0 + 18 + 9 + 0 = 27 \implies \mathcal{A} = \frac{27}{2}$$

Se i vertici non sono in ordine il contorno si autointerseca e il numero che esce non è l'area: su A, B, D, C verrebbe 0.

5.3 Tre punti allineati: i tre criteri

Criterio	Quando conviene
$\det T = 0$	sempre: è un conto solo
$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$	se ti serve sapere chi sta in mezzo
$m_{AB} = m_{BC}$	se hai già le pendenze (cap. della retta)

ESEMPIO

$A(1;1), B(3;2), C(5;3)$: $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \checkmark$, e il punto in mezzo è B .

Col criterio delle distanze gli ordini da provare sono **tre**: chi ne prova uno solo conclude «non allineati» su punti che lo sono. Col determinante non c'è niente da indovinare.

5.4 Erone: dai lati, senza altezza

$$p = \frac{a+b+c}{2} \quad \mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ESEMPIO

Lati 5, 6, 7: $p = 9$, $\mathcal{A} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}$.

5.5 Quando conviene Erone

- hai le **lunghezze** e non le coordinate;
- l'altezza verrebbe irrazionale e scomoda;
- come **verifica** di un'area trovata in altro modo.

ESEMPIO

Determinante ed Erone sono strade indipendenti: se danno lo stesso numero, è difficile che siano sbagliate tutte e due allo stesso modo.

6 Che triangolo è**6.1 Si decide sui quadrati dei lati**

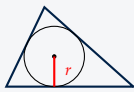
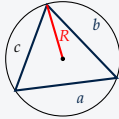
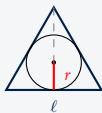
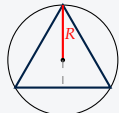
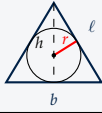
Due lati uguali $\rightarrow$ isoscele; tre $\rightarrow$ equilatero; nessuno $\rightarrow$ scaleno. Se $a^2 + b^2 = c^2$ con c il maggiore $\rightarrow$ rettangolo.

ESEMPIO

Confrontare i quadrati è esatto e non richiede di semplificare i radicali: $29 \neq 30$ si vede subito, $5,385 \neq 5,477$ un po' meno.

7 I raggi

A colpo d'occhio

Triangolo	Inscritta r	Circoscritta R
qualunque	 $\frac{\mathcal{A}}{p}$	 $\frac{a b c}{4\mathcal{A}}$
equilatero, lato ℓ	 $\frac{\ell\sqrt{3}}{6}$	 $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$
isoscele	 $\frac{b h}{2\ell + b}$	 $\frac{\ell^2}{2h}$

Nell'equilatero r è un terzo dell'altezza, e $R = 2r$. Nel rettangolo R è metà dell'ipotenusa, che è un diametro.

7.1 Il 3-4-5, da tenere a mente

Area 6, semiperimetro 6.

$$r = \frac{6}{6} = 1 \quad R = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{5}{2}$$

ESEMPIO

R è metà dell'ipotenusa: vale in *ogni* triangolo rettangolo, ed è un controllo gratuito.

8 Come si scrive una risposta

8.1 Radicali in forma normale

$\sqrt{50}$ si scrive $5\sqrt{2}$. Un numero con la virgola non è una risposta.

ESEMPIO

7,07 è utile per farsi un'idea e per controllare l'ordine di grandezza; la risposta è $5\sqrt{2}$.

8.2 I quattro passi di un problema

1. **traduci** ogni frase in una condizione;
2. **disegna**, anche male;
3. **scegli** la formula e scrivi l'equazione;
4. **controlla** sul disegno.

ESEMPIO

Il disegno dice quante risposte aspettarsi *prima* di calcolarle: su una bisettrice, di solito, due.