

SOLUZIONI: IL PIANO CARTESIANO

La numerazione è la stessa del file degli esercizi.

Sono svolti i **primi due esercizi di ogni blocco** — così ogni tipologia ha il suo modello — e **tutti quelli di livello ■■■■**. In ogni soluzione, accanto al passaggio, c'è **da dove viene la formula**: la distanza è Pitagora, il punto medio è una media, e ogni formula inversa è la diretta risolta rispetto a un'altra lettera. Chi sa da dove vengono non le confonde.

1. Dove sta il punto

Esercizio 1.

→ $P(3; 2)$ (dove sta?)

→ I segni sono $(+; +)$. (si numerano in senso antiorario da in alto a destra)

→ primo quadrante

Esercizio 2.

→ $P(-3; 2)$ (dove sta?)

→ I segni sono $(-; +)$. (si numerano in senso antiorario da in alto a destra)

→ secondo quadrante

2. Il traduttore: dalla frase alla condizione

Esercizio 51.

→ Il punto P sta sull'asse delle ascisse. (tradurre serve a ridurre le incognite)

→ $y = 0$, cioè $P(x; 0)$

Esercizio 52.

→ Il punto P sta sull'asse delle ordinate. (tradurre serve a ridurre le incognite)

→ $x = 0$, cioè $P(0; y)$

3. Distanza fra due punti

Esercizio 71.

→ $A(-4; 2), B(3; 2)$ (distanza, ma guarda prima le coordinate)

→ Stessa **ordinata**: il segmento è orizzontale. (e' il controllo che si fa PRIMA di scrivere la formula generale)

→ $\overline{AB} = |3 - (-4)| = 7$ (un cateto e' nullo, quindi Pitagora si riduce alla differenza delle ascisse)

→ Il valore assoluto evita di dover decidere quale coordinata sia la maggiore. (e viene dalla radice di un quadrato, non da una scelta)

Esercizio 72.

→ $A(-2; 2), B(-2; -1)$ (distanza, ma guarda prima le coordinate)

→ Stessa **ascissa**: il segmento è verticale. (e' il controllo che si fa PRIMA di scrivere la formula generale)

→ $\overline{AB} = |-1 - 2| = 3$ (stessa cosa con l'altro cateto nullo: differenza delle ordinate)

→ Il valore assoluto evita di dover decidere quale coordinata sia la maggiore. (e viene dalla radice di un quadrato, non da una scelta)

Esercizio 93.

→ $P(-6; 8)$ (distanza dall'origine)

→ $\overline{OP} = \sqrt{-6^2 + 8^2}$ (e' la formula generale con $A = O(0; 0)$: le differenze diventano le coordinate stesse)

→ = **10** (in forma normale, come tutte le distanze)

Esercizio 94.

→ $P(3; 4)$ (distanza dall'origine)

→ $\overline{OP} = \sqrt{3^2 + 4^2}$ (e' la formula generale con $A = O(0; 0)$: le differenze diventano le coordinate stesse)

→ = **5** (in forma normale, come tutte le distanze)

Esercizio 109.

→ $A(1; 1), B(5; 4)$ (da misurare)

→ I due cateti: $\Delta x = 4, \Delta y = 3$. (sono le differenze delle coordinate, e il loro ordine non conta: verranno elevate al quadrato)

→ $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$ (e' il teorema di Pitagora, non una formula nuova)

→ = **5** (in forma normale: un numero con la virgola non e' una risposta)

Esercizio 110.

→ $A(0; 0), B(3; 4)$ (da misurare)

→ I due cateti: $\Delta x = 3, \Delta y = 4$. (sono le differenze delle coordinate, e il loro ordine non conta: verranno elevate al quadrato)

→ $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25}$ (e' il teorema di Pitagora, non una formula nuova)

→ = **5** (in forma normale: un numero con la virgola non e' una risposta)

Esercizio 135.

→ $A(5; 1), B(-4; 13)$ (da misurare)

→ I due cateti: $\Delta x = -9, \Delta y = 12$. (sono le differenze delle coordinate, e il loro ordine non conta: verranno elevate al quadrato)

→ $\overline{AB} = \sqrt{-9^2 + 12^2} = \sqrt{225}$ (e' il teorema di Pitagora, non una formula nuova)

→ = **15** (in forma normale: un numero con la virgola non e' una risposta)

Esercizio 136.

→ $A(0; 0), B(7; 24)$ (da misurare)

→ I due cateti: $\Delta x = 7, \Delta y = 24$. (sono le differenze delle coordinate, e il loro ordine non conta: verranno elevate al quadrato)

→ $\overline{AB} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625}$ (e' il teorema di Pitagora, non una formula nuova)

→ = **25** (in forma normale: un numero con la virgola non e' una risposta)

Esercizio 159.

→ $A(1; 1), B(3; 2), C(5; 3)$ (allineati? col criterio delle distanze)

→ $\overline{AB} = \sqrt{5}, \overline{BC} = \sqrt{5}, \overline{AC} = 2\sqrt{5}$ (servono tutte e tre: non si sa ancora quale sia la piu' lunga)

→ La piu' lunga e' la somma delle altre due, e il punto in mezzo e' B . (gli ordini da provare sono TRE: chi ne prova uno solo conclude «non allineati» su tre punti che lo sono)

→ allineati, con B fra gli altri due (questa e' l'informazione in piu' che il determinante non da')

Esercizio 160.

→ $A(5; 3), B(1; 1), C(3; 2)$ (allineati? col criterio delle distanze)

→ $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$, $\overline{BC} = \sqrt{5}$, $\overline{AC} = \sqrt{5}$ (servono tutte e tre: non si sa ancora quale sia la piu' lunga)

→ La piu' lunga e' la somma delle altre due, e il punto in mezzo e' C. (gli ordini da provare sono TRE: chi ne prova uno solo conclude «non allineati» su tre punti che lo sono)

→ allineati, con C fra gli altri due (questa e' l'informazione in piu' che il determinante non da')

4. La coordinata mancante

Esercizio 179.

→ A (1; 2) e B (4; y) con $\overline{AB} = 5$ (manca una coordinata)

→ Si eleva al quadrato: $25 = 3^2 + (y - 2)^2$ (cosi' sparisce la radice e resta un'equazione)

→ $(y - 2)^2 = 16$ (di secondo grado incompleta: le soluzioni sono DUE)

→ $y = -2$ oppure $y = 6$ (una distanza non sa da che parte sta il punto: darne una sola e' l'errore standard di questo esercizio)

Esercizio 180.

→ A (0; 0) e B (3; y) con $\overline{AB} = 5$ (manca una coordinata)

→ Si eleva al quadrato: $25 = 3^2 + (y - 0)^2$ (cosi' sparisce la radice e resta un'equazione)

→ $(y - 0)^2 = 16$ (di secondo grado incompleta: le soluzioni sono DUE)

→ $y = -4$ oppure $y = 4$ (una distanza non sa da che parte sta il punto: darne una sola e' l'errore standard di questo esercizio)

5. Punto medio

Esercizio 203.

→ A (1; 1), B (5; 4) (il punto in mezzo)

→ $x_M = \frac{1+5}{2}$, $y_M = \frac{1+4}{2}$ (e' una MEDIA: c'e' un piu', non un meno)

→ $M\left(3; \frac{5}{2}\right)$ (controllo senza disegnare: il punto medio deve stare fra i due estremi)

Esercizio 204.

→ A (0; 0), B (3; 4) (il punto in mezzo)

$$\rightarrow x_M = \frac{0+3}{2}, \quad y_M = \frac{0+4}{2} \text{ (e' una MEDIA: c'e' un piu', non un meno)}$$

$$\rightarrow \mathbf{M} \left(\frac{3}{2}; 2 \right) \text{ (controllo senza disegnare: il punto medio deve stare fra i due estremi)}$$

Esercizio 229.

$$\rightarrow A(5; 1), B(-4; 13) \text{ (il punto in mezzo)}$$

$$\rightarrow x_M = \frac{5+(-4)}{2}, \quad y_M = \frac{1+13}{2} \text{ (e' una MEDIA: c'e' un piu', non un meno)}$$

$$\rightarrow \mathbf{M} \left(\frac{1}{2}; 7 \right) \text{ (controllo senza disegnare: il punto medio deve stare fra i due estremi)}$$

Esercizio 230.

$$\rightarrow A(0; 0), B(7; 24) \text{ (il punto in mezzo)}$$

$$\rightarrow x_M = \frac{0+7}{2}, \quad y_M = \frac{0+24}{2} \text{ (e' una MEDIA: c'e' un piu', non un meno)}$$

$$\rightarrow \mathbf{M} \left(\frac{7}{2}; 12 \right) \text{ (controllo senza disegnare: il punto medio deve stare fra i due estremi)}$$

Esercizio 253.

$$\rightarrow A(2; 1) \text{ e } M(4; -1): \text{ trova } B \text{ (la formula si usa all'indietro)}$$

$$\rightarrow \text{Da } x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ si ricava } x_B = 2x_M - x_A. \text{ (non e' una formula da imparare: e' la diretta risolta rispetto a } x_B \text{)}$$

$$\rightarrow x_B = 2 \cdot 4 - 2, \quad y_B = 2 \cdot -1 - 1$$

$$\rightarrow \mathbf{B}(6; -3) \text{ (e si controlla rifacendo la diretta: il medio di A e B deve tornare M)}$$

Esercizio 254.

$$\rightarrow A(0; 0) \text{ e } M(3; 2): \text{ trova } B \text{ (la formula si usa all'indietro)}$$

$$\rightarrow \text{Da } x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ si ricava } x_B = 2x_M - x_A. \text{ (non e' una formula da imparare: e' la diretta risolta rispetto a } x_B \text{)}$$

$$\rightarrow x_B = 2 \cdot 3 - 0, \quad y_B = 2 \cdot 2 - 0$$

$$\rightarrow \mathbf{B}(6; 4) \text{ (e si controlla rifacendo la diretta: il medio di A e B deve tornare M)}$$

6. Baricentro

Esercizio 277.

→ $A(2; 1), B(6; -3), C(-7; 0)$ (il punto d'incontro delle mediane)

→ $x_G = \frac{2+6+(-7)}{3}, \quad y_G = \frac{1+(-3)+0}{3}$ (la media delle TRE coordinate: si divide per tre)

→ $G\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ (coordinate frazionarie: normale, si divide per tre)

Esercizio 278.

→ $A(0; 0), B(3; 0), C(0; 3)$ (il punto d'incontro delle mediane)

→ $x_G = \frac{0+3+0}{3}, \quad y_G = \frac{0+0+3}{3}$ (la media delle TRE coordinate: si divide per tre)

→ $G(1; 1)$ (coordinate frazionarie: normale, si divide per tre)

Esercizio 329.

→ $A(2; 1), B(6; -3)$ e $G\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$: trova C (il terzo vertice)

→ Da $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ viene $x_C = 3x_G - (x_A + x_B)$. (la diretta, risolta)

→ $C(-7; 0)$ (e si controlla rifacendo il baricentro)

Esercizio 330.

→ $A(0; 0), B(3; 0)$ e $G(1; 1)$: trova C (il terzo vertice)

→ Da $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ viene $x_C = 3x_G - (x_A + x_B)$. (la diretta, risolta)

→ $C(0; 3)$ (e si controlla rifacendo il baricentro)

7. Che triangolo è

Esercizio 349.

→ $A(2; 1), B(6; -3), C(-7; 0)$ (che triangolo è?)

→ I lati: $\sqrt{178}, \sqrt{82}, 4\sqrt{2}$. (si confrontano i QUADRATI, che sono numeri esatti: 32, 82, 178)

→ scaleno

Esercizio 350.

→ $A(0; 0), B(3; 0), C(0; 3)$ (che triangolo è?)

→ I lati: $3\sqrt{2}, 3, 3$. (si confrontano i QUADRATI, che sono numeri esatti: 9, 9, 18)

→ $9 + 9 = 18$: vale Pitagora. (e' la prova che l'angolo fra i due lati minori e' retto)

→ **isoscele rettangolo**

8. Area con il determinante**Esercizio 401.**

→ $A(2; 1), B(6; -3), C(-7; 0)$ (area col determinante)

→ $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (la colonna di uni e' quella che fa funzionare la formula)

→ $\det T = -40$ (con Sarrus)

→ $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |-40| = 20$ (il valore assoluto non e' un ornamento: il determinante cambia segno se si scambiano due vertici)

Esercizio 402.

→ $A(0; 0), B(3; 0), C(0; 3)$ (area col determinante)

→ $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (la colonna di uni e' quella che fa funzionare la formula)

→ $\det T = 9$ (con Sarrus)

→ $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |9| = \frac{9}{2}$ (il valore assoluto non e' un ornamento: il determinante cambia segno se si scambiano due vertici)

Esercizio 453.

→ $A(0; 0), B(1; 1), C(2; 2)$ (sono allineati?)

→ $\det T = 0$

→ **Determinante nullo, quindi area nulla: i tre punti sono allineati.** (un triangolo di area zero non e' un triangolo. E' il modo piu' rapido di verificare un allineamento, senza scrivere nessuna retta)

Esercizio 454.

→ $A(1; 2), B(3; 6), C(5; 10)$ (sono allineati?)

→ $\det T = 0$

→ Determinante nullo, quindi area nulla: **i tre punti sono allineati**. (un triangolo di area zero non è un triangolo. È il modo più rapido di verificare un allineamento, senza scrivere nessuna retta)

Esercizio 467.

→ $A(0; 0), B(4; 0), C(4; 3), D(0; 3)$ (area di un poligono con Gauss)

→ Si incrociano i vertici a coppie consecutive, e si torna al primo: $D \rightarrow A$. (il perimetro si chiude: l'ultimo vertice va incrociato col primo, ed è il termine che si dimentica)

→ $(0 \cdot 0 - 4 \cdot 0) + (4 \cdot 3 - 4 \cdot 0) + (4 \cdot 3 - 0 \cdot 3) + (0 \cdot 0 - 0 \cdot 3)$ (ogni parentesi è il determinante di due vertici consecutivi)

→ $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |24| = 12$ (il valore assoluto perché la somma cambia segno se si percorre il contorno al contrario)

Esercizio 468.

→ $A(0; 0), B(6; 0), C(4; 3), D(1; 3)$ (area di un poligono con Gauss)

→ Si incrociano i vertici a coppie consecutive, e si torna al primo: $D \rightarrow A$. (il perimetro si chiude: l'ultimo vertice va incrociato col primo, ed è il termine che si dimentica)

→ $(0 \cdot 0 - 6 \cdot 0) + (6 \cdot 3 - 4 \cdot 0) + (4 \cdot 3 - 1 \cdot 3) + (1 \cdot 0 - 0 \cdot 3)$ (ogni parentesi è il determinante di due vertici consecutivi)

→ $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |27| = \frac{27}{2}$ (il valore assoluto perché la somma cambia segno se si percorre il contorno al contrario)

Esercizio 487.

→ $A(0; 0), B(4; 0), C(5; 3), D(2; 5), E(-1; 3)$ (area di un poligono con Gauss)

→ Si incrociano i vertici a coppie consecutive, e si torna al primo: $E \rightarrow A$. (il perimetro si chiude: l'ultimo vertice va incrociato col primo, ed è il termine che si dimentica)

→ $(0 \cdot 0 - 4 \cdot 0) + (4 \cdot 3 - 5 \cdot 0) + (5 \cdot 5 - 2 \cdot 3) + (2 \cdot 3 - (-1) \cdot 5) + ((-1) \cdot 0 - 0 \cdot 3)$ (ogni parentesi è il determinante di due vertici consecutivi)

→ $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |42| = 21$ (il valore assoluto perché la somma cambia segno se si percorre il contorno al contrario)

Esercizio 488.

→ $A(0; 0), B(6; 1), C(7; 5), D(3; 7), E(-1; 4)$ (area di un poligono con Gauss)

→ Si incrociano i vertici a coppie consecutive, e si torna al primo: $E \rightarrow A$. (il perimetro si chiude: l'ultimo vertice va incrociato col primo, ed è il termine che si dimentica)

→ $(0 \cdot 1 - 6 \cdot 0) + (6 \cdot 5 - 7 \cdot 1) + (7 \cdot 7 - 3 \cdot 5) + (3 \cdot 4 - (-1) \cdot 7) + (-1 \cdot 0 - 0 \cdot 4)$ (ogni parentesi è il determinante di due vertici consecutivi)

→ $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |76| = 38$ (il valore assoluto perché la somma cambia segno se si percorre il contorno al contrario)

Esercizio 489.

→ $A(1; 0), B(5; 1), C(6; 4), D(3; 6), E(0; 3)$ (area di un poligono con Gauss)

→ Si incrociano i vertici a coppie consecutive, e si torna al primo: $E \rightarrow A$. (il perimetro si chiude: l'ultimo vertice va incrociato col primo, ed è il termine che si dimentica)

→ $(1 \cdot 1 - 5 \cdot 0) + (5 \cdot 4 - 6 \cdot 1) + (6 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + (3 \cdot 3 - 0 \cdot 6) + (0 \cdot 0 - 1 \cdot 3)$ (ogni parentesi è il determinante di due vertici consecutivi)

→ $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |45| = \frac{45}{2}$ (il valore assoluto perché la somma cambia segno se si percorre il contorno al contrario)

Esercizio 490.

→ $A(0; 0), B(5; 0), C(7; 3), D(3; 6), E(-2; 3)$ (area di un poligono con Gauss)

→ Si incrociano i vertici a coppie consecutive, e si torna al primo: $E \rightarrow A$. (il perimetro si chiude: l'ultimo vertice va incrociato col primo, ed è il termine che si dimentica)

→ $(0 \cdot 0 - 5 \cdot 0) + (5 \cdot 3 - 7 \cdot 0) + (7 \cdot 6 - 3 \cdot 3) + (3 \cdot 3 - (-2) \cdot 6) + (-2 \cdot 0 - 0 \cdot 3)$ (ogni parentesi è il determinante di due vertici consecutivi)

→ $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |69| = \frac{69}{2}$ (il valore assoluto perché la somma cambia segno se si percorre il contorno al contrario)

Esercizio 491.

→ $A(2; 0), B(7; 1), C(8; 5), D(4; 7), E(0; 4)$ (area di un poligono con Gauss)

→ Si incrociano i vertici a coppie consecutive, e si torna al primo: $E \rightarrow A$. (il perimetro si chiude: l'ultimo vertice va incrociato col primo, ed è il termine che si dimentica)

→ $(2 \cdot 1 - 7 \cdot 0) + (7 \cdot 5 - 8 \cdot 1) + (8 \cdot 7 - 4 \cdot 5) + (4 \cdot 4 - 0 \cdot 7) + (0 \cdot 0 - 2 \cdot 4)$ (ogni parentesi è il determinante di due vertici consecutivi)

→ $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |73| = \frac{73}{2}$ (il valore assoluto perché la somma cambia segno se si percorre il contorno al contrario)

9. Area con Erone

Esercizio 492.

→ lati 5, 6, 7 (ci sono le lunghezze, non le coordinate: il determinante non si può scrivere)

$$\rightarrow p = \frac{5 + 6 + 7}{2} = 9 \text{ (il semiperimetro)}$$

$$\rightarrow \mathcal{A} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \text{ (tutto sotto una radice sola)}$$

$$\rightarrow = 6\sqrt{6}$$

Esercizio 493.

→ lati 3, 4, 5 (ci sono le lunghezze, non le coordinate: il determinante non si può scrivere)

$$\rightarrow p = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6 \text{ (il semiperimetro)}$$

$$\rightarrow \mathcal{A} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \text{ (tutto sotto una radice sola)}$$

$$\rightarrow = 6$$

10. I raggi

Esercizio 520.

→ $A(0; 0), B(4; 0), C(0; 3)$ (raggio della circonferenza inscritta)

$$\rightarrow \mathcal{A} = 6, \quad p = 6$$

$$\rightarrow r = \frac{\mathcal{A}}{p} = 1 \text{ (vale per un triangolo qualunque)}$$

Esercizio 521.

→ $A(0; 0), B(3; 0), C(0; 4)$ (raggio della circonferenza inscritta)

$$\rightarrow \mathcal{A} = 6, \quad p = 6$$

$$\rightarrow r = \frac{\mathcal{A}}{p} = 1 \text{ (vale per un triangolo qualunque)}$$

Esercizio 538.

→ $A(0; 0), B(4; 0), C(0; 3)$ (raggio della circonferenza circoscritta)

$$\rightarrow \text{Lati } 5, 3, 4; \mathcal{A} = 6$$

$$\rightarrow R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{5}{2} \text{ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)}$$

Esercizio 539.

$$\rightarrow A(0; 0), B(3; 0), C(0; 4) \text{ (raggio della circonferenza circoscritta)}$$

$$\rightarrow \text{Lati } 5, 4, 3; \mathcal{A} = 6$$

$$\rightarrow R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{5}{2} \text{ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)}$$

Esercizio 540.

$$\rightarrow A(0; 0), B(6; 0), C(0; 8) \text{ (raggio della circonferenza circoscritta)}$$

$$\rightarrow \text{Lati } 10, 8, 6; \mathcal{A} = 24$$

$$\rightarrow R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = 5 \text{ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)}$$

Esercizio 541.

$$\rightarrow A(0; 0), B(12; 0), C(0; 5) \text{ (raggio della circonferenza circoscritta)}$$

$$\rightarrow \text{Lati } 13, 5, 12; \mathcal{A} = 30$$

$$\rightarrow R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{13}{2} \text{ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)}$$

Esercizio 542.

$$\rightarrow A(0; 0), B(8; 0), C(0; 15) \text{ (raggio della circonferenza circoscritta)}$$

$$\rightarrow \text{Lati } 17, 15, 8; \mathcal{A} = 60$$

$$\rightarrow R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{17}{2} \text{ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)}$$

Esercizio 543.

$$\rightarrow A(0; 0), B(24; 0), C(0; 7) \text{ (raggio della circonferenza circoscritta)}$$

$$\rightarrow \text{Lati } 25, 7, 24; \mathcal{A} = 84$$

$$\rightarrow R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{25}{2} \text{ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)}$$

Esercizio 544.

→ $A(0; 0), B(9; 0), C(0; 12)$ (raggio della circonferenza circoscritta)

→ Lati 15, 12, 9; $\mathcal{A} = 54$

→ $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{15}{2}$ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)

Esercizio 545.

→ $A(0; 0), B(20; 0), C(0; 21)$ (raggio della circonferenza circoscritta)

→ Lati 29, 21, 20; $\mathcal{A} = 210$

→ $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{29}{2}$ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)

Esercizio 546.

→ $A(1; 1), B(5; 1), C(1; 4)$ (raggio della circonferenza circoscritta)

→ Lati 5, 3, 4; $\mathcal{A} = 6$

→ $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{5}{2}$ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)

Esercizio 547.

→ $A(-2; 0), B(2; 0), C(2; 3)$ (raggio della circonferenza circoscritta)

→ Lati 3, 5, 4; $\mathcal{A} = 6$

→ $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{5}{2}$ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)

Esercizio 548.

→ $A(0; 0), B(16; 0), C(0; 12)$ (raggio della circonferenza circoscritta)

→ Lati 20, 12, 16; $\mathcal{A} = 96$

→ $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = 10$ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)

Esercizio 549.

→ $A(0; 0), B(10; 0), C(0; 24)$ (raggio della circonferenza circoscritta)

→ Lati 26, 24, 10; $\mathcal{A} = 120$

$$\rightarrow R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = 13 \text{ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)}$$

Esercizio 550.

$$\rightarrow A(0; 0), B(40; 0), C(0; 9) \text{ (raggio della circonferenza circoscritta)}$$

$$\rightarrow \text{Lati } 41, 9, 40; \mathcal{A} = 180$$

$$\rightarrow R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{41}{2} \text{ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)}$$

Esercizio 551.

$$\rightarrow A(2; 1), B(10; 1), C(2; 7) \text{ (raggio della circonferenza circoscritta)}$$

$$\rightarrow \text{Lati } 10, 6, 8; \mathcal{A} = 24$$

$$\rightarrow R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = 5 \text{ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)}$$

Esercizio 552.

$$\rightarrow A(-1; -1), B(11; -1), C(-1; 4) \text{ (raggio della circonferenza circoscritta)}$$

$$\rightarrow \text{Lati } 13, 5, 12; \mathcal{A} = 30$$

$$\rightarrow R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{13}{2} \text{ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)}$$

Esercizio 553.

$$\rightarrow A(0; 0), B(15; 0), C(0; 20) \text{ (raggio della circonferenza circoscritta)}$$

$$\rightarrow \text{Lati } 25, 20, 15; \mathcal{A} = 150$$

$$\rightarrow R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{25}{2} \text{ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)}$$

Esercizio 554.

$$\rightarrow A(0; 0), B(28; 0), C(0; 45) \text{ (raggio della circonferenza circoscritta)}$$

$$\rightarrow \text{Lati } 53, 45, 28; \mathcal{A} = 630$$

$$\rightarrow R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{53}{2} \text{ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)}$$

Esercizio 555.

→ $A(3; 2), B(11; 2), C(3; 17)$ (raggio della circonferenza circoscritta)

→ Lati 17, 15, 8; $\mathcal{A} = 60$

→ $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}} = \frac{17}{2}$ (in un triangolo rettangolo viene meta' dell'ipotenusa, che e' un diametro: e' un controllo gratuito)

11. Problemi**Esercizio 556.**

→ Il punto P sta sulla bisettrice del primo e terzo quadrante e dista $\sqrt{18}$ dall'origine. Trova P . (traduci, disegna, scegli la formula)

→ Sulla bisettrice: $P(k; k)$. Allora $\sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{18}$, cioè $2k^2 = 18$ e $k = \pm 3$. **$P_1(3; 3)$ e $P_2(-3; -3)$.**

Esercizio 557.

→ Il punto Q sta sull'asse x ed è equidistante da $A(0; 3)$ e $B(6; 1)$. Trova Q . (traduci, disegna, scegli la formula)

→ Sull'asse x : $Q(x; 0)$. Imponendo $\overline{QA}^2 = \overline{QB}^2$: $x^2 + 9 = (x - 6)^2 + 1$, cioè $12x = 28$ e $x = \frac{7}{3}$. **$Q(\frac{7}{3}; 0)$.**

Esercizio 558.

→ Il punto P ha l'ascissa doppia dell'ordinata e dista $\sqrt{45}$ dall'origine. Trova P . (traduci, disegna, scegli la formula)

→ $P(2k; k)$, quindi $4k^2 + k^2 = 45$, cioè $k^2 = 9$ e $k = \pm 3$. **$P_1(6; 3)$ e $P_2(-6; -3)$.**

Esercizio 559.

→ $M(3; 2)$ è il punto medio di AB , con $A(1; -1)$. Trova B e la lunghezza di AB . (traduci, disegna, scegli la formula)

→ $B(2 \cdot 3 - 1; 2 \cdot 2 + 1) = \mathbf{B(5; 5)}$. $\overline{AB} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = \mathbf{2\sqrt{13}}$.

Esercizio 560.

→ Il triangolo ha vertici $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ e il baricentro in $G(3; 2)$. Trova il terzo vertice e l'area. (traduci, disegna, scegli la formula)

→ $C(3 \cdot 3 - 6; 3 \cdot 2 - 0) = \mathbf{C(3; 6)}$. L'area è $\frac{1}{2}|-36| = \mathbf{18}$.

Esercizio 561.

→ Trova il punto dell'asse y che dista 5 da $A(3; 2)$. (traduci, disegna, scegli la formula)

→ $P(0; y): 9 + (y - 2)^2 = 25$, cioè $(y - 2)^2 = 16$ e $y = 6$ oppure $y = -2$. $\mathbf{P_1(0; 6)}$ e $\mathbf{P_2(0; -2)}$.

Esercizio 562.

→ I punti $A(1; 1)$, $B(4; 5)$ e $C(1; 5)$ sono i vertici di un triangolo. Che triangolo è, e quanto misura la sua area? (traduci, disegna, scegli la formula)

→ Lati: $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{CA} = 4$. Poiché $9 + 16 = 25$ è **rettangolo**, e l'area è $\frac{3 \cdot 4}{2} = \mathbf{6}$.

Esercizio 563.

→ Il punto P dista 3 dall'asse x e 4 dall'asse y . Quanti punti soddisfano la richiesta, e quali sono? (traduci, disegna, scegli la formula)

→ $|y| = 3$ e $|x| = 4$: le combinazioni sono **quattro** — $(4; 3)$, $(4; -3)$, $(-4; 3)$, $(-4; -3)$, uno per quadrante.

Esercizio 564.

→ Verifica che $A(0; 0)$, $B(2; 3)$ e $C(6; 9)$ sono allineati. (traduci, disegna, scegli la formula)

→ Il determinante vale $0 \cdot (3 - 9) - 0 \cdot (2 - 6) + (2 \cdot 9 - 3 \cdot 6) = 0$. Area nulla: **sono allineati**.

Esercizio 565.

→ Il segmento AB ha estremi $A(-2; 1)$ e $B(4; 9)$. Trova il punto medio e verifica che dista da A quanto da B . (traduci, disegna, scegli la formula)

→ $M(1; 5)$. $\overline{AM} = \sqrt{9 + 16} = 5$ e $\overline{MB} = \sqrt{9 + 16} = 5$: **coincidono**, come dev'essere.

Esercizio 566.

→ Un triangolo ha i lati lunghi 13, 14 e 15. Trova l'area e il raggio della circonferenza inscritta. (traduci, disegna, scegli la formula)

→ $p = 21$, quindi $\mathcal{A} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = \mathbf{84}$. E $r = \frac{84}{21} = \mathbf{4}$.

Esercizio 567.

→ Il punto P sta sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante e ha ascissa -5 . Trova P e la sua distanza dall'origine. (traduci, disegna, scegli la formula)

→ Sulla bisettrice del II e IV le coordinate sono opposte: $\mathbf{P(-5; 5)}$. La distanza è $\sqrt{25 + 25} = \mathbf{5\sqrt{2}}$.

Esercizio 568.

→ Il triangolo di vertici $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(0; 8)$: trova area, perimetro e raggio della circonferenza inscritta. (traduci, disegna, scegli la formula)

→ Cateti 6 e 8, ipotenusa 10. $\mathcal{A} = 24$, $2p = 24$ quindi $p = 12$, e $r = \frac{24}{12} = \mathbf{2}$.

Esercizio 569.

→ Il punto P ha ascissa 3 e dista $\sqrt{34}$ da $A(0; -2)$. Trova P . (traduci, disegna, scegli la formula)

→ $9 + (y + 2)^2 = 34$, cioè $(y + 2)^2 = 25$: $y = 3$ oppure $y = -7$. $\mathbf{P_1(3; 3)}$ e $\mathbf{P_2(3; -7)}$.

Esercizio 570.

→ $ABCD$ è un parallelogramma con $A(0; 0)$, $B(5; 1)$, $C(7; 5)$. Trova D . (traduci, disegna, scegli la formula)

→ Le diagonali si tagliano a metà: il medio di AC è $(\frac{7}{2}; \frac{5}{2})$, e deve essere anche il medio di BD . Quindi $D(7 - 5; 5 - 1) = \mathbf{D(2; 4)}$.

Esercizio 571.

→ Trova il punto della bisettrice del primo e terzo quadrante equidistante da $A(1; 0)$ e $B(0; 5)$. (traduci, disegna, scegli la formula)

→ $P(k; k)$ con $(k - 1)^2 + k^2 = k^2 + (k - 5)^2$, cioè $-2k + 1 = -10k + 25$ e $k = 3$. $\mathbf{P(3; 3)}$.

12. Vero o falso, trova l'errore, a ritroso, con parametro**Esercizio 572.**

→ Il punto $P(5; 0)$ sta nel primo quadrante.

→ **Falso**

→ Sta **sull'asse** x . I quadranti sono le quattro regioni aperte: i punti degli assi non appartengono a nessuna.

Esercizio 573.

→ I punti $A(2; 3)$ e $B(3; 2)$ sono lo stesso punto.

→ **Falso**

→ La coppia è **ordinata**: sono due punti diversi, simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Esercizio 584.

→ $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A) + (y_B - y_A)}$ (c'è uno sbaglio: quale?)

→ Mancano i **quadrati** delle differenze: $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Esercizio 585.

→ $x_M = \frac{x_B - x_A}{2}$ (c'è uno sbaglio: quale?)

→ Il punto medio è una **media**: ci vuole il più. $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$.

Esercizio 592.

→ Il punto medio di AB è $M(3; 1)$ e $A(1; -2)$. Ricostruisci B . (il risultato c'è, manca un dato)

→ $B(2 \cdot 3 - 1; 2 \cdot 1 + 2) = \mathbf{B(5; 4)}$.

Esercizio 593.

→ Un segmento ha lunghezza 5, un estremo in $A(0; 0)$ e l'altro sull'asse x . Ricostruisci l'altro estremo. (il risultato c'è, manca un dato)

→ $B(x; 0)$ con $|x| = 5$: $\mathbf{B_1(5; 0)}$ oppure $\mathbf{B_2(-5; 0)}$.

Esercizio 598.

→ Per quali valori di k il punto $P(k; k - 3)$ sta sull'asse x ? (non un numero: per quali valori)

→ Serve ordinata nulla: $k - 3 = 0$, cioè **$k = 3$** .

Esercizio 599.

→ Per quali valori di k il punto $P(2k; k + 1)$ sta sulla bisettrice del primo e terzo quadrante? (non un numero: per quali valori)

→ Serve $y = x$: $k + 1 = 2k$, cioè **$k = 1$** .

Esercizio 600.

→ Per quali valori di a i punti $A(1; 2)$, $B(3; a)$ e $C(5; 8)$ sono allineati? (non un numero: per quali valori)

→ Il determinante deve annullarsi. Sviluppando viene $a = 5$: **$a = 5$** , cioè B sul punto medio.

Esercizio 601.

→ Per quali valori di k il punto $P(k; 2)$ dista 5 da $A(1; -2)$? (non un numero: per quali valori)

→ $(k - 1)^2 + 16 = 25$, quindi $(k - 1)^2 = 9$: **$k = 4$** oppure **$k = -2$** .

Esercizio 602.

→ Per quali valori di k il punto $P(k; -k)$ dista $\sqrt{32}$ dall'origine? (non un numero: per quali valori)

→ $2k^2 = 32$, cioè $k^2 = 16$: **$k = \pm 4$** .

Esercizio 603.

→ Per quale valore di h il triangolo di vertici $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(0; h)$ ha area 15? (non un numero: per quali valori)

→ $\frac{6h}{2} = 15$, quindi **$h = 5$** (o $h = -5$, col vertice sotto l'asse).

Esercizio 604.

→ **Dimostra** che la distanza fra due punti con la stessa ordinata è $|x_B - x_A|$. (qui non ci sono numeri: si lavora con le lettere)

→ nella formula generale $y_B - y_A = 0$, quindi resta $\sqrt{(x_B - x_A)^2} = |x_B - x_A|$. Il valore assoluto viene dalla radice quadrata di un quadrato, non da una scelta. (una dimostrazione vale per TUTTI i casi insieme: e' la differenza fra sapere una formula e sapere perche')

Esercizio 605.

→ **Dimostra** che $\overline{OP} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$. (qui non ci sono numeri: si lavora con le lettere)

→ è la formula generale con $A = O(0;0)$: le differenze diventano $x_P - 0$ e $y_P - 0$. (una dimostrazione vale per TUTTI i casi insieme: e' la differenza fra sapere una formula e sapere perche')

Esercizio 606.

→ **Dimostra**, con il teorema di Talete, che $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$. (qui non ci sono numeri: si lavora con le lettere)

→ proiettando A, M, B sull'asse x con parallele all'asse y , da $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ segue $\overline{A'M'} \cong \overline{M'B'}$, cioè $x_M - x_A = x_B - x_M$ e quindi $2x_M = x_A + x_B$. (una dimostrazione vale per TUTTI i casi insieme: e' la differenza fra sapere una formula e sapere perche')

Esercizio 607.

→ **Dimostra** che $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ partendo da $\overline{CG} \cong 2\overline{GM}$. (qui non ci sono numeri: si lavora con le lettere)

→ proiettando, $x_C - x_G = 2(x_G - x_M)$, da cui $3x_G = x_C + 2x_M$; sostituendo $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ si ottiene la media delle tre. (una dimostrazione vale per TUTTI i casi insieme: e' la differenza fra sapere una formula e sapere perche')

Esercizio 608.

→ **Dimostra** che il punto medio di AB è equidistante da A e da B . (qui non ci sono numeri: si lavora con le lettere)

→ $\overline{AM} = \sqrt{\left(\frac{x_B - x_A}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_B - y_A}{2}\right)^2}$, e lo stesso conto per $\overline{MB}$ dà lo stesso numero: le differenze cambiano segno, ma sono al quadrato. (una dimostrazione vale per TUTTI i casi insieme: e' la differenza fra sapere una formula e sapere perche')

Esercizio 609.

→ **Giustifica** perché nell'area col determinante c'è un valore assoluto. (qui non ci sono numeri: si lavora con le lettere)

→ scambiando due vertici il determinante cambia segno, perché si scambiano due righe della matrice. L'area del triangolo non cambia: il modulo toglie il segno del *verso di percorrenza*. (una dimostrazione vale per TUTTI i casi insieme: e' la differenza fra sapere una formula e sapere perché')

Esercizio 610.

→ **Dimostra** che tre punti sono allineati se e solo se l'area del triangolo che formano è nulla. (qui non ci sono numeri: si lavora con le lettere)

→ un triangolo di area zero ha altezza nulla rispetto a ogni base, quindi il terzo vertice sta sulla retta degli altri due; e viceversa, tre punti su una retta non racchiudono nessuna superficie. (una dimostrazione vale per TUTTI i casi insieme: e' la differenza fra sapere una formula e sapere perché')

Esercizio 611.

→ **Dimostra** che la formula di Gauss, applicata a tre vertici, dà lo stesso numero del determinante. (qui non ci sono numeri: si lavora con le lettere)

→ svolgendo la somma di Gauss per $n = 3$ si ottiene $x_A y_B - x_B y_A + x_B y_C - x_C y_B + x_C y_A - x_A y_C$, che riordinato è lo sviluppo di $\det T$ con la colonna di uni. (una dimostrazione vale per TUTTI i casi insieme: e' la differenza fra sapere una formula e sapere perché')

Esercizio 612.

→ **Dimostra** che il quadrilatero di vertici A, B, C, D è un parallelogramma se e solo se $A + C = B + D$ (coordinata per coordinata). (qui non ci sono numeri: si lavora con le lettere)

→ $A + C = B + D$ equivale a $\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$, cioè le diagonali AC e BD hanno lo stesso punto medio — che è la condizione necessaria e sufficiente per il parallelogramma. (una dimostrazione vale per TUTTI i casi insieme: e' la differenza fra sapere una formula e sapere perché')

Esercizio 613.

→ **Giustifica** perché in un triangolo rettangolo il raggio della circonferenza circoscritta è metà dell'ipotenusa. (qui non ci sono numeri: si lavora con le lettere)

→ l'angolo retto insiste sull'ipotenusa; per il teorema dell'angolo alla circonferenza, un angolo di 90° insiste su un diametro. Quindi l'ipotenusa è un diametro e $R = \frac{i}{2}$. (una dimostrazione vale per TUTTI i casi insieme: e' la differenza fra sapere una formula e sapere perché')

Esercizio 614.

→ **Dimostra** che in un triangolo equilatero vale $R = 2r$. (qui non ci sono numeri: si lavora con le lettere)

→ in un equilatero baricentro, incentro e circocentro coincidono, e quel punto divide ogni mediana in parti di rapporto 2 : 1: la parte verso il vertice è R , quella verso il lato è r . (una dimostrazione vale per TUTTI i casi insieme: e' la differenza fra sapere una formula e sapere perche')

Esercizio 615.

→ **Dimostra** che il baricentro di un triangolo sta sempre *dentro* il triangolo. (qui non ci sono numeri: si lavora con le lettere)

→ le sue coordinate sono medie delle tre dei vertici con pesi $\frac{1}{3}$ positivi e di somma 1: è una combinazione convessa, e una combinazione convessa di tre punti sta nel triangolo che formano. (una dimostrazione vale per TUTTI i casi insieme: e' la differenza fra sapere una formula e sapere perche')
