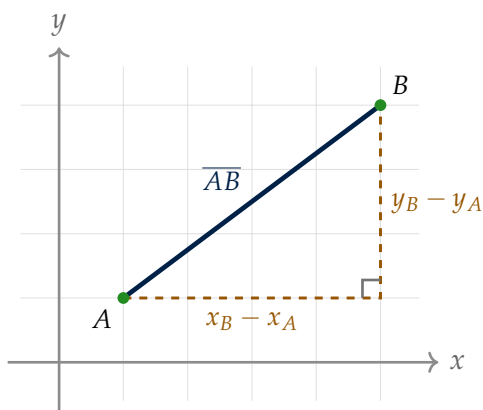


IL PIANO CARTESIANO

GEOMETRIA ANALITICA

Punti, distanze, punto medio, baricentro,
aree e raggi



IllogicoMatematico

Teoria, metodi ed errori tipici

Indice

1	Il piano cartesiano	3
2	Quadranti, assi, bisettrici	4
3	Il traduttore: dalla frase alla formula	5
4	Distanza fra due punti	7
5	Punto medio	10
6	Baricentro	11
7	Che triangolo è	12
8	Area con il determinante	13
9	Area con Erone	15
10	I raggi: inscritta e circoscritta	16
11	I problemi scritti in italiano	17
12	Quale formula, e quando	18

1 Il piano cartesiano

Due rette orientate e perpendicolari, e ogni punto del piano ha un indirizzo: una **coppia ordinata** di numeri. È l'idea di Cartesio, ed è quella che permette di fare i conti su una figura invece di guardarla.

Formula 1.1: Le parole da usare bene:

- **Origine** $O(0; 0)$: dove gli assi si incrociano.
- **Asse x** (ascisse): l'orizzontale. La prima coordinata.
- **Asse y** (ordinate): la verticale. La seconda.
- **Coppia ordinata** $P(x; y)$: l'ordine conta.

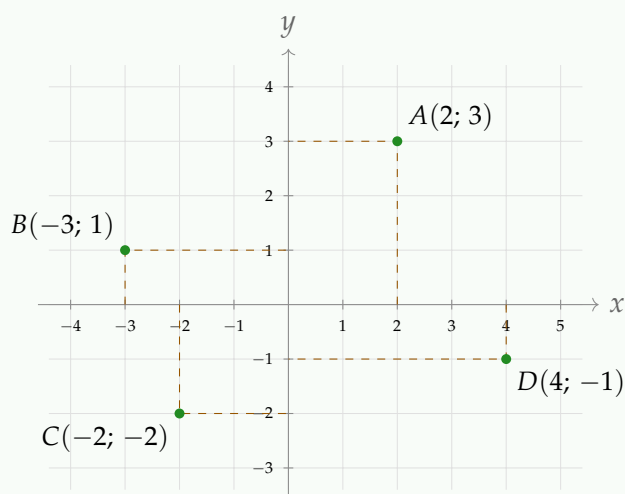
$A(2; 3)$ e $B(3; 2)$ sono **punti diversi**, e non è un dettaglio da pignoli: sono in due posti diversi del piano.

Fra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali c'è una **corrispondenza biunivoca**: a ogni punto corrisponde una coppia e una sola, e a ogni coppia un punto e uno solo. È questa frase — non una formula — che manda avanti tutto il capitolo: da qui in poi «punto» e «coppia di numeri» sono la stessa cosa, e su una coppia di numeri si possono fare i conti.

Cosa devi già sapere

- **I numeri relativi.** Le coordinate hanno un segno, e il quadrante si legge dai segni.
- **Il teorema di Pitagora.** La formula della distanza è Pitagora: se lo si sa, non c'è niente da imparare a memoria.
- **I radicali.** Una distanza è quasi sempre irrazionale, e la risposta si dà in forma normale: $\sqrt{50}$ si scrive $5\sqrt{2}$.
- **Il valore assoluto.** La distanza di un punto da un asse è $|x|$ o $|y|$, e questo raddoppia le risposte.
- **Equazioni e sistemi di primo grado.** Le formule inverse si *ricavano*, non si imparano.
- **Il determinante 3×3 e Sarrus**, per l'area.

Esempio Svolto 1.1: Quattro punti sul piano:

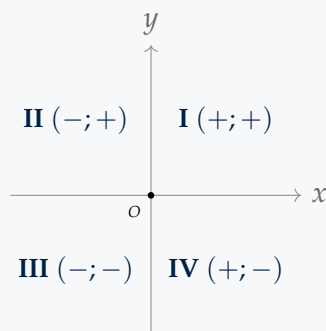


I tratteggi sono le **proiezioni** sugli assi: leggere le coordinate vuol dire seguirli fino agli assi, e scriverle vuol dire percorrerli al contrario.

2 Quadranti, assi, bisettrici

Formula 2.1: I segni dei quattro quadranti:

- **I:** $x > 0, y > 0$ $(+; +)$
- **II:** $x < 0, y > 0$ $(-; +)$
- **III:** $x < 0, y < 0$ $(-; -)$
- **IV:** $x > 0, y < 0$ $(+; -)$



Si numerano in senso **antiorario** partendo da in alto a destra.

Gli assi non sono un quadrante

Un punto con una coordinata nulla — $P(5; 0)$, $Q(0; -4)$ — non sta in nessun quadrante: sta *su un asse*. E l'origine non sta né in un quadrante né su un asse solo: sta su tutti e due. Alla domanda «in che quadrante sta $P(5; 0)$?» la risposta è «in nessuno», non «nel primo». I quadranti sono le quattro regioni **aperte** in cui gli assi tagliano il piano, e i bordi non ci appartengono.

Formula 2.2: Punti sugli assi e sulle bisettrici:

Dove sta	Condizione
sull'asse x	$y = 0$, cioè $P(x; 0)$
sull'asse y	$x = 0$, cioè $P(0; y)$
bisettrice del I e III	$y = x$, cioè $P(k; k)$
bisettrice del II e IV	$y = -x$, cioè $P(k; -k)$

Sulla prima bisettrice le coordinate sono **uguali**: $(3; 3)$. Sulla seconda sono **opposte**: $(-2; 2)$.

Esempio Svolto 2.1: Dove stanno questi quattro punti:

$A(-3; 5)$, $B(0; -2)$, $C(4; 4)$, $D(-1; 1)$.

A : ascissa negativa e ordinata positiva, $(-; +)$, quindi **secondo quadrante**.

B : l'ascissa è nulla, quindi B non sta in nessun quadrante: sta **sull'asse y** , sotto l'origine.

C : entrambe positive, $(+; +)$, quindi **primo quadrante**. E poiché $4 = 4$, sta anche **sulla bisettrice del I e III**.

D : $(-; +)$, quindi secondo quadrante; e poiché $1 = -(-1)$, sta **sulla bisettrice del II e IV**.

Le due domande sono diverse e vanno tutte e due: il quadrante dice in quale delle quattro regioni si è finiti, la bisettrice dice se per caso si è finiti proprio sulla diagonale che la taglia a metà.

3 Il traduttore: dalla frase alla formula

I problemi di geometria analitica sono scritti in italiano, e il punto in cui si perde tempo non sono i conti: è capire che cosa dice il testo. Tradurre serve a ridurre le incognite: se «l'ascissa è doppia dell'ordinata», il punto non ha due incognite ma una, e si scrive $P(2y; y)$.

Metodo 3.1: Le traduzioni che tornano sempre:

Quello che dice il testo	Quello che scrivi
«sta sull'asse x »	$y = 0 \rightarrow P(x; 0)$
«sta sull'asse y »	$x = 0 \rightarrow P(0; y)$
«l'ascissa è doppia dell'ordinata»	$x = 2y \rightarrow P(2y; y)$
«l'ordinata supera l'ascissa di 3»	$y = x + 3$
«la somma delle coordinate è 5»	$x + y = 5 \rightarrow y = 5 - x$
«dista 4 dall'asse x »	$ y = 4 \rightarrow y = \pm 4$
«dista 2 dall'asse y »	$ x = 2 \rightarrow x = \pm 2$
«l'ascissa di A è tripla di quella di B »	$x_A = 3x_B$
«sta sulla bisettrice del I e III»	$y = x \rightarrow P(k; k)$

Esempio Svolto 3.1: Una frase tradotta, e il problema si risolve da solo:

«Trova il punto P dell'asse x che dista 5 da $A(1; 4)$.»

Prima traduzione. «Sta sull'asse x » vuol dire $y_P = 0$. Quindi P non ha due incognite ma una sola: $P(x; 0)$.

Seconda traduzione. «Dista 5 da A » vuol dire $\overline{AP} = 5$, cioè $\sqrt{(x-1)^2 + (0-4)^2} = 5$.

Da qui è algebra di primo biennio: si eleva al quadrato, $(x-1)^2 + 16 = 25$, cioè $(x-1)^2 = 9$, e le soluzioni sono $x-1 = 3$ oppure $x-1 = -3$:

$$P_1(4; 0) \quad \text{e} \quad P_2(-2; 0)$$

Il lavoro vero sono state le due righe di traduzione. Chi parte dai conti senza averle fatte si trova con due incognite e una sola equazione, e si blocca.

«Supera di 3»: chi è il più grande?

«L'ordinata supera l'ascissa di 3» si scrive $y = x + 3$, non $x = y + 3$. Il verbo dice chi è più grande, e il $+3$ va dalla parte del *più piccolo*.

Il controllo in due secondi: prova con un numero. Se $x = 1$, l'ordinata deve superarlo di 3, quindi $y = 4$. La formula $y = x + 3$ dà $4 \checkmark$; la formula $x = y + 3$ darebbe $y = -2$, che non supera niente.

La distanza da un asse dà DUE risposte

«Il punto dista 4 dall'asse x » non vuol dire $y = 4$: vuol dire $|y| = 4$, cioè $y = 4$ **oppure** $y = -4$. Sopra e sotto l'asse ci sono due rette che distano 4, non una.

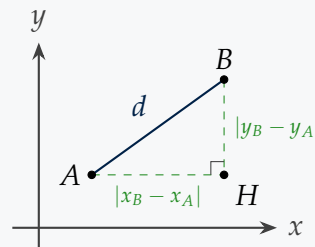
Chi ne scrive una sola perde metà delle soluzioni del problema, e non se ne accorge perché la risposta che trova esiste.

4 Distanza fra due punti

Formula 4.1: La formula, che è Pitagora:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

I due cateti sono le differenze delle coordinate, l'ipotenusa è la distanza. Non c'è niente da imparare a memoria: c'è da riconoscere il triangolo rettangolo.



Formula 4.2: I due casi facili: segmenti paralleli agli assi:

Se i due punti hanno la **stessa ordinata** il segmento è orizzontale, e la distanza è la differenza delle ascisse:

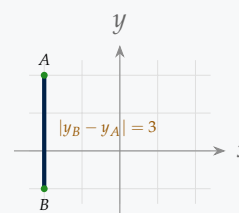
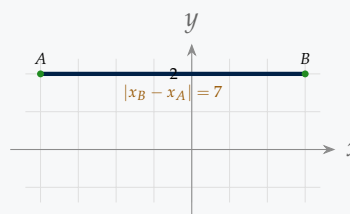
$$\overline{AB} = |x_B - x_A|$$

Se hanno la **stessa ascissa** il segmento è verticale:

$$\overline{AB} = |y_B - y_A|$$

Il valore assoluto serve a non doversi chiedere quale delle due coordinate sia la maggiore.

Non sono formule nuove: sono la formula generale con uno dei due cateti nullo. Ma si usano di continuo — lati di rettangoli, altezze, basi — e passarci per Pitagora è tempo buttato.



Formula 4.3: La distanza dall'origine: Con $A = O(0; 0)$ la formula generale si accorcia:

$$\overline{OP} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$$

Serve spessissimo, perché «dista d dall'origine» è una delle frasi che compaiono più spesso nei problemi. Anche questa non è una formula nuova: è la stessa con $x_A = y_A = 0$.

Esempio Svolto 4.1: I tre casi sullo stesso foglio:

Orizzontale. $A(-4; 2)$ e $B(3; 2)$: stessa ordinata, quindi

$$\overline{AB} = |3 - (-4)| = 7$$

Verticale. $A(-2; 2)$ e $B(-2; -1)$: stessa ascissa, quindi

$$\overline{AB} = |-1 - 2| = 3$$

Dall'origine. $P(-6; 8)$:

$$\overline{OP} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

In tutti e tre si poteva usare la formula generale e veniva lo stesso. Il punto non è che siano formule diverse: è che guardare le coordinate *prima* di calcolare fa risparmiare metà del lavoro.

Esempio Svolto 4.2: $A(1; 1)$ e $B(5; 4)$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

I cateti sono 4 e 3: è la terna 3-4-5, e infatti viene intera.

Esempio Svolto 4.3: Quando viene irrazionale:

$C(-2; 3)$ e $D(3; -2)$:

$$\overline{CD} = \sqrt{(3+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

La risposta è $5\sqrt{2}$, **non** 7,07. Il numero con la virgola è un'approssimazione utile per farsi un'idea; la risposta è l'altra.

L'ordine dei punti, e il quadrato che salva

$(x_B - x_A)$ o $(x_A - x_B)$? Non cambia niente, perché il risultato viene **elevato al quadrato** e il segno sparisce. È l'unica libertà di questa formula, ed è bene saperla per non perdere tempo a decidere.

Quello che invece cambia tutto è sommare le differenze invece dei loro quadrati: $\sqrt{(x_B - x_A) + (y_B - y_A)}$ non è la distanza di niente.

Metodo 4.1: Allineamento con le distanze: Tre punti sono **allineati** quando la distanza fra i due più lontani è la **somma** delle altre due:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Il criterio dà un'informazione in più rispetto agli altri: dice **quale** punto sta in mezzo — qui B . In cambio pretende di provare **tutti e tre** gli ordini, perché non si sa in partenza chi

sia il punto centrale.

È la disuguaglianza triangolare al suo caso limite: in un triangolo vero un lato è sempre *minore* della somma degli altri due, e vale l'uguale solo quando il triangolo si è schiacciato su una retta.

Esempio Svolto 4.4: $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(5;3)$ con le distanze:

$$\overline{AB} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \quad \overline{BC} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \quad \overline{AC} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

La più lunga è $\overline{AC}$, e $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ✓:

allineati, con **B** fra gli altri due

Provare l'ordine sbagliato — per esempio chiedersi se $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$ — darebbe $3\sqrt{5} \neq \sqrt{5}$, che è falso: e non vuol dire che i punti non sono allineati, vuol dire che A non sta in mezzo.

Un ordine solo non basta

È l'errore che rende questo criterio inaffidabile in mano a chi ha fretta: si prova $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, viene falso, e si conclude «non allineati». Ma la formula funziona **solo** se il punto scritto in mezzo è davvero quello in mezzo.

Gli ordini sono tre e vanno provati tutti prima di concludere. Se hai fretta e non ti serve sapere chi sta in mezzo, usa il **determinante** (par. 8): è un conto solo, è razionale, e non chiede di indovinare niente.

Metodo 4.2: La distanza all'indietro: trovare la coordinata mancante: Se si conosce la distanza e manca una coordinata, si **eleva al quadrato** e si risolve:

$$d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Resta un'equazione di secondo grado incompleta, e le soluzioni sono **due**: una distanza non sa da che parte sta il punto.

Esempio Svolto 4.5: $A(1; 2)$, $B(4; y)$, con $\overline{AB} = 5$:

$$25 = (4 - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 + (y - 2)^2$$

$$(y - 2)^2 = 16 \implies y - 2 = \pm 4$$

$$y = 6 \text{ oppure } y = -2$$

Due punti: $B_1(4;6)$ sopra e $B_2(4;-2)$ sotto. Darne uno solo è l'errore standard di questo esercizio.

5 Punto medio

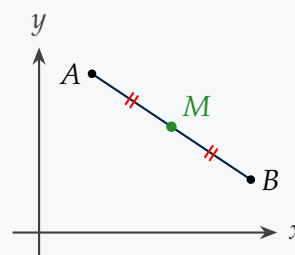
Formula 5.1: Diretta e inversa:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Inverse, per trovare un estremo noti l'altro e il medio:

$$x_B = 2x_M - x_A \quad y_B = 2y_M - y_A$$

Le inverse non si imparano: si *ricavano* dalla diretta, che è un'equazione di primo grado in x_B .



Metodo 5.1: Da dove viene: il teorema di Talete:

La formula non si postula, si **dimostra**, e serve un solo teorema di geometria: quello di **Talete**. Dice che un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali stacca segmenti congruenti su una trasversale se e solo se li stacca congruenti anche sull'altra.

Si proiettano A, M, B sull'asse x con tre parallele all'asse y , ottenendo A', M', B' . Per ipotesi $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, quindi per Talete

$$\overline{A'M'} \cong \overline{M'B'}$$

cioè, in coordinate, $|x_M - x_A| = |x_B - x_M|$.

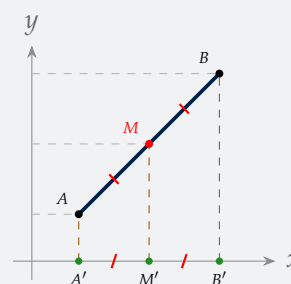
Poiché M sta fra A e B , i due valori assoluti si tolgono senza cambiare niente:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \implies 2x_M = x_A + x_B$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Proiettando sull'asse y si ottiene allo stesso modo

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$



Esempio Svolto 5.1: Diretta e inversa sullo stesso segmento:

$A(2; 1)$ e $B(6; -3)$:

$$x_M = \frac{2+6}{2} = 4 \quad y_M = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \mathbf{M(4; -1)}$$

E all'indietro, sapendo A e M :

$$x_B = 2 \cdot 4 - 2 = 6 \quad y_B = 2 \cdot (-1) - 1 = -3 \quad \mathbf{B(6; -3)}$$

Torna, e questo è il controllo: chi usa l'inversa dovrebbe sempre rifare la diretta per verificare.

Il punto medio è una media, non una differenza

$x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$ ha un **più**. Scriverci un meno è l'errore più diffuso di tutto il capitolo, e produce un punto che spesso cade anche in un quadrante plausibile.

Il controllo: il punto medio sta *in mezzo*. Se il risultato non sta fra i due estremi, è sbagliato — e per accorgersene basta guardare i numeri, senza disegnare.

6 Baricentro**Formula 6.1: Diretta e inversa:**

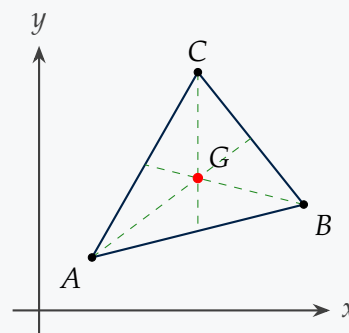
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Inverse, per il terzo vertice noti gli altri due e G :

$$x_C = 3x_G - (x_A + x_B)$$

$$y_C = 3y_G - (y_A + y_B)$$

È il punto d'incontro delle mediane, e la formula è la stessa del punto medio con un termine in più: la media delle coordinate.

**Esempio Svolto 6.1: $A(2;1)$, $B(6;-3)$, $C(-7;0)$:**

$$x_G = \frac{2+6-7}{3} = \frac{1}{3} \quad y_G = \frac{1-3+0}{3} = -\frac{2}{3} \quad \mathbf{G\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)}$$

Il baricentro ha spesso coordinate **frazionarie**, e non è un errore: si divide per tre.

Metodo 6.1: Da dove viene: ancora Talete, e il rapporto 2 : 1: Il baricentro divide ogni mediana in due parti, e quella verso il **vertice** è *doppia* dell'altra:

$$\overline{CG} \cong 2 \overline{GM}$$

dove M è il punto medio di AB . Da qui la formula esce in quattro righe.

Si proiettano M, G, C sull'asse x con tre parallele all'asse y , ottenendo M', G', C' . Per Talete il rapporto 2 : 1 si conserva sulla proiezione:

$$\overline{C'G'} \cong 2 \overline{G'M'} \implies x_C - x_G = 2(x_G - x_M)$$

$$x_C - x_G = 2x_G - 2x_M \implies 3x_G = x_C + 2x_M \implies x_G = \frac{x_C + 2x_M}{3}$$

Adesso si sostituisce $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, che è il paragrafo precedente:

$$x_G = \frac{x_C + 2 \cdot \frac{x_A + x_B}{2}}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

Proiettando sull'asse y si ottiene allo stesso modo y_G .

Ecco perché la formula del baricentro somiglia così tanto a quella del punto medio: **la contiene**. Non sono due formule da imparare, è una sola applicata due volte.

Il rapporto 2 : 1 non è un dettaglio da ricordare a memoria

È la ragione per cui si divide per tre e non per due, ed è anche il motivo per cui il baricentro è più vicino al lato che al vertice. Se un giorno la formula ti scappa, ricostruiscila da lì: il baricentro sta a $\frac{1}{3}$ della mediana partendo dal lato.

7 Che triangolo è

Dati tre vertici, la prima domanda utile è che tipo di triangolo formano: la risposta decide quali formule si possono usare dopo.

Metodo 7.1: Si guarda ai lati, e ai loro quadrati:

1. Calcola i tre lati con la formula della distanza.
2. Due lati uguali $\rightarrow$ **isoscele**; tre $\rightarrow$ **equilatero**; nessuno $\rightarrow$ **scaleno**.
3. Per il rettangolo usa Pitagora *sui quadrati*: se $a^2 + b^2 = c^2$ con c il maggiore, è **rettangolo**.

I quadrati delle distanze sono numeri interi o frazioni: confrontare quelli è esatto, e non richiede di semplificare i radicali.

Esempio Svolto 7.1: Tre triangoli, tre risposte:

$(0;0), (4;0), (0;3)$: lati 4, 3, 5. $9 + 16 = 25$: rettangolo.

$(0;0), (4;0), (2;5)$: lati 4, $\sqrt{29}$, $\sqrt{29}$. Due uguali: **isoscele**.

$(0;0), (5;0), (1;4)$: lati 5, $\sqrt{32}$, $\sqrt{17}$. Tutti diversi: **scaleno**.

Decidere «a occhio» dal disegno

Due lati che nel disegno sembrano uguali possono misurare $\sqrt{29}$ e $\sqrt{30}$. La differenza è meno di un decimo, invisibile a mano libera, e cambia la risposta.

Si decide **sui numeri**, e possibilmente sui quadrati: $29 \neq 30$ si vede subito, $5,385 \neq 5,477$ un po' meno.

8 Area con il determinante

Formula 8.1: La matrice con la colonna di uni: Dati $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$:

$$T = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det T|$$

Il valore assoluto **non** è un ornamento: il determinante cambia segno se si scambiano due vertici — cioè se si percorre il triangolo al contrario — e un'area negativa non esiste.

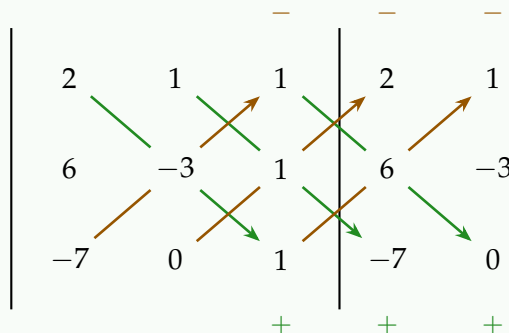
Metodo 8.1: Lo schema di Sarrus: Si scrive la matrice fra le due barre del determinante e si **ricopiano a destra le prime due colonne**, fuori dalle barre. Poi si moltiplica lungo le diagonali: le tre che **scendono** si sommano, le tre che **salgono** si sottraggono.

$$\det T = D_+ - D_-$$

Le due colonne ricopiate **non** fanno parte della matrice: sono un aiuto per l'occhio, e stanno apposta fuori dalle barre.

Esempio Svolto 8.1: $A(2;1)$, $B(6;-3)$, $C(-7;0)$ con Sarrus:

Si riscrivono le prime due colonne a destra:



Diagonali che scendono, col più:

$$D_+ = (2)(-3)(1) + (1)(1)(-7) + (1)(6)(0) = -6 - 7 + 0 = -13$$

Diagonali che salgono, col meno:

$$D_- = (-7)(-3)(1) + (0)(1)(2) + (1)(6)(1) = 21 + 0 + 6 = 27$$

$$\det T = D_+ - D_- = -13 - 27 = -40 \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} |-40| = 20$$

Il determinante nullo dice una cosa importante

Se $\det T = 0$ l'area è zero, e un triangolo di area zero non è un triangolo: i tre punti sono **allineati**. È il modo più rapido di verificare l'allineamento, e non richiede di scrivere nessuna retta.

È anche il più affidabile dei tre criteri, perché è **un conto solo**: quello delle distanze (par. 4) chiede di provare tre ordini, e quello dei coefficienti angolari — che si vede nel capitolo della retta — non si applica se due punti hanno la stessa ascissa.

Formula 8.2: La formula di Gauss, per qualunque poligono: Dati i vertici $P_1, P_2, \dots, P_n$ scritti in ordine lungo il perimetro:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|$$

dove dopo P_n si torna a P_1 : l'ultimo termine incrocia l'ultimo vertice col primo.

Si chiama anche formula **dell'allacciamento delle scarpe**, perché scrivendo le coordinate in colonna e ripetendo la prima riga in fondo, i prodotti da fare si incrociano come i lacci.

Per $n = 3$ è il determinante: $\frac{1}{2} |x_A y_B - x_B y_A + x_B y_C - x_C y_B + x_C y_A - x_A y_C|$ è, riordinato, esattamente $\frac{1}{2} |\det T|$. La formula del triangolo non è un'altra formula: è questa con tre vertici.

Esempio Svolto 8.2: Il quadrilatero $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(4;3)$, $D(1;3)$:

Si incrociano i vertici a coppie consecutive, e alla fine si torna ad A :

$$\begin{aligned} & (0 \cdot 0 - 6 \cdot 0) + (6 \cdot 3 - 4 \cdot 0) + (4 \cdot 3 - 1 \cdot 3) + (1 \cdot 0 - 0 \cdot 3) \\ &= 0 + 18 + 9 + 0 = 27 \\ & \mathcal{A} = \frac{1}{2} |27| = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Il controllo: è un trapezio con basi 6 e 3 e altezza 3, quindi $\frac{(6+3) \cdot 3}{2} = \frac{27}{2} \checkmark$. Oppure si taglia con la diagonale AC e si sommano due triangoli col determinante: $9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2} \checkmark$.

I vertici vanno in ordine, e la formula non se ne accorge

Su $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(4;4)$, $D(0;4)$ la formula dà 16: giusto, è un quadrato di lato 4. Scambiando C e D — cioè scrivendo A, B, D, C — il contorno diventa una **farfalla** che si autointerseca, e la formula dà 0.

Non è un errore di calcolo: la formula somma aree *con il segno*, e i due lobi della farfalla si annullano. Prima di applicarla, guarda il disegno e controlla di aver girato tutto intorno al poligono senza tornare indietro.

9 Area con Erone

Formula 9.1: Dai tre lati, senza altezza:

$$p = \frac{a+b+c}{2} \quad \mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p è il **semiperimetro**: si sommano i lati e si divide per due. Tutto il resto sta sotto una radice sola.

Esempio Svolto 9.1: Lati 5, 6, 7:

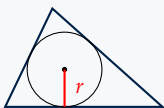
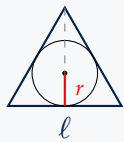
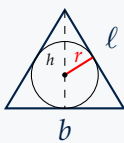
$$\begin{aligned} p &= \frac{5+6+7}{2} = 9 \\ \mathcal{A} &= \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6} \end{aligned}$$

Anche qui la risposta è il radicale in forma normale, non 14,7.

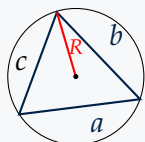
Metodo 9.1: Quando conviene Erone:

- Quando il problema dà le **lunghezze dei lati** e non le coordinate: senza coordinate il determinante non si può scrivere.
- Quando l'altezza verrebbe **brutta**, cioè irrazionale e scomoda da calcolare.
- Come **verifica** di un'area trovata con base per altezza, o col determinante: sono strade indipendenti, e se danno lo stesso numero è difficile che siano sbagliate tutte e due allo stesso modo.

10 I raggi: inscritta e circoscritta**Formula 10.1: Circonferenza inscritta, raggio r :**

Disegno	Caso e formula
 SCALENO (Generale)	Triangolo scaleno $r = \frac{A}{p}$ (p = semiperimetro, A = area)
 EQUILATERO	Triangolo equilatero $r = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$ r è un terzo dell'altezza.
 ISOSCELE	Triangolo isoscele $r = \frac{bh}{2\ell + b}$ (base b, lato obliquo ℓ, altezza h)

Formula 10.2: Circonferenza circoscritta, raggio R :

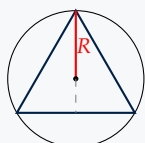
Disegno**Caso e formula**

SCALENO (Generale)

Triangolo scaleno

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\mathcal{A}}$$

(prodotto dei lati diviso quattro aree)

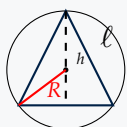


EQUILATERO

Triangolo equilatero

$$R = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$$

Qui $R = 2r$: baricentro, incentro e circocentro sono lo stesso punto.



ISOSCELE

Triangolo isoscele

$$R = \frac{\ell^2}{2h}$$

(ℓ = lato obliquo, h = altezza)

Esempio Svolto 10.1: Il triangolo 3-4-5:

Vertici $(0;0)$, $(4;0)$, $(0;3)$: cateti 4 e 3, ipotenusa 5.

$$\mathcal{A} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \quad p = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6$$

$$r = \frac{\mathcal{A}}{p} = \frac{6}{6} = 1 \quad R = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$$

R è metà dell'ipotenusa, come dev'essere in ogni triangolo rettangolo: l'ipotenusa è un diametro.

11 I problemi scritti in italiano

Metodo 11.1: Quattro passi, sempre gli stessi:

1. **Traduci** ogni frase in una condizione algebrica, e scrivi i punti con meno incognite possibile.
2. **Disegna**, anche male. Serve a controllare i segni e a capire quante risposte aspettarsi.
3. **Scegli la formula** in base a quello che ti serve — distanza, medio, baricentro, area

— e scrivi l'equazione.

4. **Controlla** la risposta sul disegno: un punto medio fuori dal segmento, o un'area negativa, si vedono senza rifare i conti.

Esempio Svolto 11.1: Un problema completo:

Il punto P sta sulla bisettrice del primo e terzo quadrante e dista $\sqrt{18}$ dall'origine. Trova P .

1. **Traduco.** Sulla bisettrice del I e III: $y = x$, quindi $P(k; k)$. Una incognita sola.

2. **Scrivo la distanza.**

$$\overline{OP} = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2} = \sqrt{18}$$

3. **Risolvo.** $2k^2 = 18 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3$.

4. **Rispondo.** $P_1(3; 3)$ e $P_2(-3; -3)$.

Due punti, uno per ogni ramo della bisettrice. Il disegno lo diceva prima dei conti.

12 Quale formula, e quando

Formula 12.1: La tabella da tenere davanti:

Che cosa ti chiedono	Che cosa usi
quanto distano due punti	$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$
una coordinata, nota la distanza	la stessa, elevata al quadrato
il punto in mezzo	media delle due coordinate
un estremo, noti l'altro e il medio	$2x_M - x_A$
il baricentro	media delle tre coordinate
il terzo vertice, noto G	$3x_G - (x_A + x_B)$
l'area di un triangolo dai vertici	determinante, diviso due, in modulo
l'area di un poligono dai vertici	Gauss, coi vertici in ordine
l'area dai lati	Erone
se tre punti sono allineati	determinante = 0
... e anche chi sta in mezzo	le distanze: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
che triangolo è	i tre lati, e Pitagora sui quadrati

Esempio Svolto 12.1: Un problema che le usa quasi tutte:

«Del triangolo $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(0; 8)$ trova l'area, di' che triangolo è e calcola il raggio della circonferenza inscritta.»

Che triangolo è $\rightarrow$ i tre lati. $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = \sqrt{36 + 64} = 10$. Tutti diversi, e $36 + 64 = 100$: vale Pitagora, quindi è **rettangolo scaleno**, con l'angolo retto in A .

L'area $\rightarrow$ il determinante: $\det T = 0(0 - 8) - 0(6 - 0) + (6 \cdot 8 - 0 \cdot 0) = 48$, e $\mathcal{A} = \frac{48}{2} = 24$.

Il raggio $\rightarrow r = \mathcal{A}/p$. Il perimetro è $6 + 8 + 10 = 24$, quindi $p = 12$ e $r = \frac{24}{12} = 2$.

Tre domande, tre righe della tabella. Il controllo che chiude il problema: Erone deve dare la stessa area del determinante, $\sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{576} = 24 \checkmark$.

Dove si va da qui

Il capitolo successivo è la **retta**: la stessa idea — tradurre la geometria in algebra — applicata non più a punti singoli ma a infiniti punti allineati. La distanza, il punto medio e l'area restano, e si usano lì dentro a ogni riga.

Una cosa di questo capitolo tornerà subito: il determinante nullo, che qui dice «i punti sono allineati», là diventerà la condizione perché tre punti stiano sulla stessa retta.

Indice analitico

allineamento, 8

area, 13

 poligono, 14

baricentro, 11

bisettrice, 4

coppia ordinata, 3

corrispondenza biunivoca, 3

distanza, 7

Erone, 15

Gauss, 14

natura del triangolo, 12

piano cartesiano, 3

problemi, 17

punto medio, 10

quadranti, 4

raggio circoscritta, 16

raggio inscritta, 16

Sarrus, 13

Talete, 10, 12

traduttore, 5