

FORMULARIO: LA RETTA

In ogni riquadro: la formula, la riga **QUANDO** che dice a quale domanda risponde, e un esempio con i numeri.

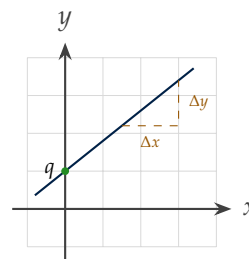
1 Le due forme

1.1 Esplicita e implicita

$$y = mx + q \quad ax + by + c = 0$$

Dalla implicita si leggono i parametri:

$$m = -\frac{a}{b} \quad q = -\frac{c}{b} \quad (b \neq 0)$$



QUANDO ti danno un'equazione e ti servono pendenza e intercetta, o viceversa. Si ragiona in esplicita, si calcola in implicita.

ESEMPIO

$2x - y - 3 = 0$: si isola $-y = -2x + 3$, si cambiano i segni, $y = 2x - 3$. Quindi $m = 2$, $q = -3$.
Verifica rapida: $m = -\frac{2}{-1} = 2 \checkmark$. Attento al segno di b : qui $b = -1$, non 1.

1.2 Casi particolari di $ax + by + c = 0$

Se	diventa	cioè
$a = 0$	$by + c = 0$	$y = k$, parallela all'asse x
$b = 0$	$ax + c = 0$	$x = h$, parallela all'asse y
$c = 0$	$ax + by = 0$	passa per l' origine
$a = c = 0$	$by = 0$	$y = 0$, è l' asse x
$b = c = 0$	$ax = 0$	$x = 0$, è l' asse y

QUANDO guardi un'equazione e vuoi sapere subito che retta è, senza disegnarla. Il termine noto nullo si vede a colpo d'occhio, e vuol dire «passa per l'origine».

ESEMPIO

$3y + 9 = 0 \rightarrow y = -3$; $5x - 10 = 0 \rightarrow x = 2$; $2x - 3y = 0$ passa per l'origine.
E attenzione: la forma esplicita non copre tutto.

$$ax + by + c = 0 \quad \text{equivale a} \quad y = mx + q \vee x = h$$

1.3 m , l'angolo e la pendenza in percentuale

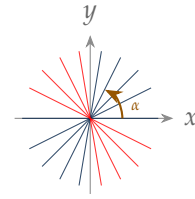
m dipende solo dall'angolo α fra retta e asse x , misurato in senso antiorario:

- α acuto $\rightarrow m > 0$; ottuso $\rightarrow m < 0$;
- α nullo $\rightarrow m = 0$; retto $\rightarrow m$ non esiste.

In percentuale:

$$\text{pendenza } \% = m \cdot 100$$

QUANDO il testo parla di **angolo**, di **salita** o di **percentuale**: rampe, strade, tetti, tassi di crescita.



ESEMPIO

Rampa all'8%: sale 8 cm ogni 100 cm, quindi $m = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$.

Angolo di 60° per l'origine: passa per $P(1; \sqrt{3})$, quindi $m = \sqrt{3}$. Con 45° , $m = 1$.

Una pendenza del 100% **non** è verticale: è 45° .

1.4 Coefficiente angolare: i due modi

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = -\frac{a}{b}$$

QUANDO il primo se hai **due punti**, il secondo se hai l'**equazione in implicita**. Se ce l'hai in esplicita, m è già scritto davanti alla x .

ESEMPIO

$A(1;2), B(3;6)$: $m = \frac{6-2}{3-1} = 2$.

$3x + 4y - 1 = 0$: $m = -\frac{3}{4}$.

L'ordine dei punti non conta, ma dev'essere lo stesso sopra e sotto.

Le formule inverse

Diretta	Inversa	A che domanda risponde
$y = mx + q$	$q = y - mx$	«per quale q la retta passa per P ?»
$m = -\frac{a}{b}$	$a = -mb$	«scrivi in implicita una retta di pendenza data»
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$y_2 = y_1 + m(x_2 - x_1)$	«l'ordinata del secondo punto, nota la pendenza»
$y - y_0 = m(x - x_0)$	$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$	«la pendenza, noti due punti»
$m_1 \cdot m_2 = -1$	$m_2 = -\frac{1}{m_1}$	l'antireciproco: capovolgi e cambia segno
$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$	$p = -\frac{c}{a}, q = -\frac{c}{b}$	le intercette, partendo dalla implicita
$d = \frac{ ax_P + by_P + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	$ ax_P + by_P + c = d\sqrt{a^2 + b^2}$	«per quale c la retta dista d da P ?» — e le risposte sono due

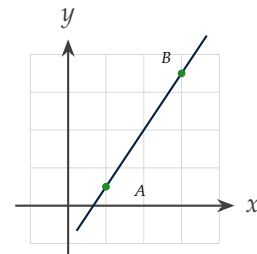
Una formula inversa non si impara: si *ricava* risolvendo la diretta rispetto alla lettera che serve. Sono tutte equazioni di primo grado.

2 Scrivere l'equazione

2.1 Per due punti

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

oppure, più comodo: si calcola m e si usa il fascio $y - y_1 = m(x - x_1)$.



QUANDO ti danno due punti. **Prima** però guarda le coordinate: se $y_A = y_B$ la retta è $y = y_A$, se $x_A = x_B$ è $x = x_A$, e non serve nessuna formula.

ESEMPIO

$A(2;1), B(4;5)$: $m = \frac{5-1}{4-2} = 2$, poi $y - 1 = 2(x - 2)$, quindi $y = 2x - 3$.

Controllo: ci devono stare tutti e due. A : $2 \cdot 2 - 3 = 1$ ✓; B : $2 \cdot 4 - 3 = 5$ ✓.

2.2 Per un punto con pendenza data

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

QUANDO è la formula che serve **quasi sempre**: parallela per un punto, perpendicolare per un punto, asse di un segmento, altezze di un triangolo. Se ne impari una sola, impara questa.

ESEMPIO

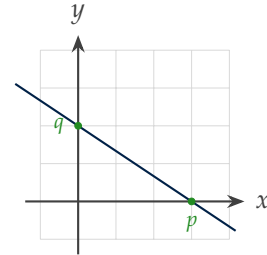
$P(1;4)$ con $m = 3$: $y - 4 = 3(x - 1)$, quindi $y = 3x + 1$.

Controllo: $x = 1$ deve dare $y = 4$ ✓.

2.3 Forma segmentaria

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

con p e q le intercette sugli assi: $P(p;0)$ e $Q(0;q)$.



QUANDO ti danno le **intersezioni con gli assi**, o te le chiedono. Non si usa se la retta passa per l'origine (uno zero a denominatore) né se è parallela a un asse.

ESEMPIO

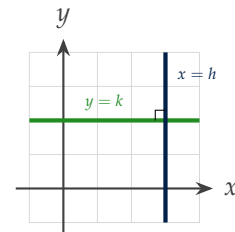
Intercette 2 e 3: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, per 6: $3x + 2y - 6 = 0$.

All'indietro, da $3x + 2y - 6 = 0$: $p = -\frac{-6}{3} = 2$, $q = -\frac{-6}{2} = 3$ ✓.

2.4 Orizzontali e verticali: nessun calcolo

$$y = k \quad (m = 0) \qquad x = h \quad (m \text{ non definito})$$

Una verticale non ha m e non ha q : non si scrive $m = \infty$.



QUANDO il testo dice «parallela all'asse x » o «all'asse y », oppure quando due punti hanno una coordinata uguale. Si legge la coordinata del punto e si scrive.

ESEMPIO

Per $P(4;5)$ parallela all'asse x : $y = 5$.

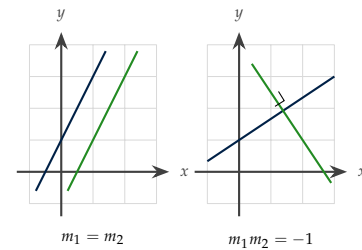
Per $P(-2;7)$ parallela all'asse y : $x = -2$.

3 Parallele e perpendicolari

3.1 Le due condizioni

$$r \parallel s \iff m_1 = m_2$$

$$r \perp s \iff m_1 \cdot m_2 = -1 \iff m_2 = -\frac{1}{m_1}$$



QUANDO devi riconoscere la posizione di due rette date, oppure *imporla* per trovare un parametro: «per quale k sono perpendicolari?».

ESEMPIO

$y = 2x + 1$ e $y = 2x - 5$: stesso m , q diversi, parallele distinte.

$y = \frac{2}{3}x + 1$ e $y = -\frac{3}{2}x + 4$: $\frac{2}{3} \cdot (-\frac{3}{2}) = -1$ ✓, perpendicolari.

3.2 Parallela o perpendicolare per un punto: tre passi

1. trova m della retta data ($-a/b$ se è in implicita);
2. scegli m^* : uguale per la parallela, $-1/m$ per la perpendicolare;
3. applica $y - y_P = m^*(x - x_P)$.

QUANDO è la richiesta più frequente del capitolo. Se la retta data è orizzontale o verticale salta il passo 2 e ragiona a parole: la perpendicolare a una verticale è orizzontale, e viceversa.

ESEMPIO

Per $P(1;5)$ parallela a $2x - 4y + 7 = 0$: $m = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$, quindi $y - 5 = \frac{1}{2}(x - 1)$ e $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

Per $P(4; -3)$ perpendicolare a $x = 7$: la data è verticale, quindi la perpendicolare è orizzontale: $y = -3$.

3.3 Il modo che funziona anche sulle verticali

Da $r: ax + by + c = 0$ e un punto P :

$$\text{parallela: } a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0$$

$$\text{perpendicolare: } b(x - x_P) - a(y - y_P) = 0$$

QUANDO quando non vuoi controllare i casi particolari. Si tengono a e b per la parallela, si **scambiano** e se ne cambia uno di segno per la perpendicolare. Vale sempre, anche su $x = 3$ e $y = 2$.

ESEMPIO

$r: 3x + y - 4 = 0$, $P(2;0)$. Perpendicolare: $1(x - 2) - 3(y - 0) = 0$, cioè $x - 3y - 2 = 0$, cioè $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

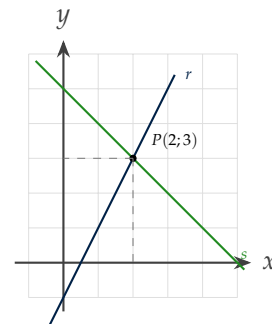
Stesso risultato dell'antireciproco, senza dover distinguere i casi.

4 Posizione reciproca e distanze

4.1 Intersezione: è un sistema

$$\begin{cases} y = m_1x + q_1 \\ y = m_2x + q_2 \end{cases}$$

- determinato $\rightarrow$ un punto, **incidenti**;
- impossibile $\rightarrow$ **parallele distinte**;
- indeterminato $\rightarrow$ **coincidenti**.



QUANDO ti chiedono «dove si incontrano», oppure il vertice di una figura, oppure il centro di un fascio. Se sono entrambe in esplicita, il **confronto** è il metodo più rapido.

ESEMPIO

$y = 2x - 1$ e $y = -x + 5$: $2x - 1 = -x + 5$, $x = 2$, poi $y = 3$. $P(2;3)$.
Controllo nell'altra equazione: $-2 + 5 = 3 \checkmark$.

4.2 Il caso facile: la retta è parallela a un asse

$$r : y = k \implies d = |y_P - k| \qquad r : x = h \implies d = |x_P - h|$$

QUANDO la retta è orizzontale o verticale. La perpendicolare è parallela all'altro asse e il segmento si conta sulla griglia: la formula generale darebbe lo stesso numero, con più lavoro.

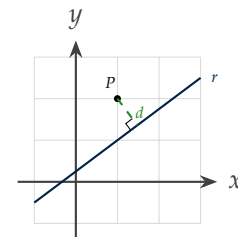
ESEMPIO

$P(3;5)$ e $y = 1$: $d = |5 - 1| = 4$.
 $P(2;4)$ e $x = 6$: $d = |2 - 6| = 4$.

4.3 Distanza punto-retta

$$d = \frac{|a x_P + b y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La retta **deve** essere in forma implicita.



QUANDO ti chiedono una distanza da una retta, l'altezza di un triangolo, il raggio di una circonferenza tangente, o «per quale k la retta dista d da P » — e in quest'ultimo caso le risposte sono due.

ESEMPIO

$P(1;2)$, $r : 3x - 4y + 1 = 0$:

$$d = \frac{|3 - 8 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4}{5}$$

Se la radice non si semplifica, la risposta è un radicale in forma normale: $\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$.

4.4 Distanza fra due parallele

Si prende un punto **qualsiasi** di una e si misura dall'altra. Solo se sono scritte con gli **stessi** a e b :

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

QUANDO ti danno due parallele. La scorciatoia è comoda ma va controllata: su $3x - 4y + 7 = 0$ e $6x - 8y - 6 = 0$ darebbe $\frac{13}{5}$, mentre la risposta vera è 2.

ESEMPIO

$3x - 4y + 7 = 0$ e $3x - 4y - 3 = 0$: qui a e b coincidono, quindi $d = \frac{|7+3|}{5} = 2$.

Col punto: su r con $y = 1$ viene $P(-1; 1)$, e $d = \frac{|-3-4-3|}{5} = 2 \checkmark$.

5 Costruzioni

5.1 Luogo geometrico, e i tre luoghi di questo capitolo

Un **luogo geometrico** è l'insieme di *tutti e soli* i punti che godono di una proprietà, detta **proprietà caratteristica**. La sua equazione $f(x; y) = 0$ è soddisfatta dai punti del luogo e da nessun altro.

Luogo	Proprietà caratteristica
la retta	i punti sono allineati
l' asse di AB	$\overline{PA} = \overline{PB}$
la bisettrice	$d(P, r) = d(P, s)$

QUANDO il testo dice «trova il luogo dei punti tali che...». Si scrive la proprietà con le coordinate di un $P(x; y)$ generico e si semplifica: l'equazione che resta è il luogo.

ESEMPIO

Asse di $A(-1; 5)$ e $B(3; 1)$ con l'equidistanza:

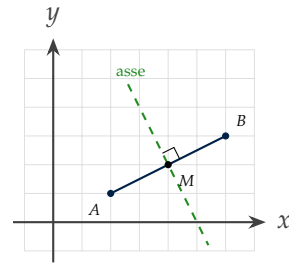
$$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = (x - 3)^2 + (y - 1)^2$$

I termini x^2 e y^2 si semplificano — succede sempre — e resta $y = x + 2$, che è di primo grado: una retta.

5.2 Asse di un segmento

Perpendicolare al segmento per il suo punto medio:

1. M , punto medio;
2. m_{AB} ;
3. $m_{\perp} = -1/m_{AB}$, poi il fascio per M .



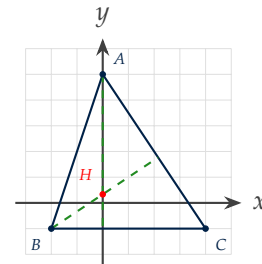
QUANDO il testo dice «asse del segmento», «luogo dei punti equidistanti da A e B», oppure quando cerchi il centro di una circonferenza per due punti.

ESEMPIO

$A(2;1), B(6;3)$: $M(4;2), m_{AB} = \frac{1}{2}, m_{\perp} = -2$, quindi $y - 2 = -2(x - 4)$ e $y = -2x + 10$.

5.3 Ortocentro

Incontro delle tre altezze. Ne bastano **due**: si scrivono le perpendicolari ai lati per i vertici opposti e si intersecano.



QUANDO te lo chiedono direttamente, o quando serve il punto d'incontro di due altezze. Guarda prima se un lato è orizzontale o verticale: in quel caso una delle altezze è immediata.

ESEMPIO

$A(0;5), B(-2;-1), C(4;-1)$: BC è orizzontale, quindi $h_A : x = 0$. Poi $m_{AC} = -\frac{3}{2}, m_{\perp} = \frac{2}{3}$, e $h_B : y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Intersecando: $H(0; \frac{1}{3})$.

5.4 Quarto vertice e allineamento

$$D = A + C - B \qquad m_{AB} = m_{BC}$$

La prima chiude il parallelogramma $ABCD$ (le diagonali si tagliano a metà); la seconda dice se tre punti stanno sulla stessa retta.

QUANDO la prima quando ti danno tre vertici consecutivi di un parallelogramma, rettangolo, rombo o quadrato. La seconda quando chiedono «sono allineati?» — ma non si applica se due punti hanno la stessa ascissa.

ESEMPIO

$A(1;2), B(4;1), C(5;4)$: $D(1 + 5 - 4; 2 + 4 - 1) = D(2;5)$.

$A(1;1), B(3;2), C(5;3)$: $m_{AB} = m_{BC} = \frac{1}{2}$, allineati.

6 Fasci e bisettrici

6.1 Fascio proprio e improprio

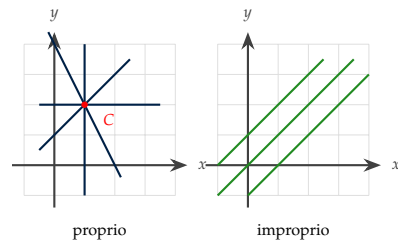
Proprio, di centro $C(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \cup x = x_0$$

Improprio, di pendenza m fissata:

$$y = mx + q$$

QUANDO il testo parla di «tutte le rette per un punto» (proprio) o «tutte le rette parallele a» (improprio). Nel proprio non dimenticare la verticale: la formula con m non la produce.



ESEMPIO

Fascio per $C(1;3)$: $y - 3 = m(x - 1)$, più $x = 1$.

Fascio di pendenza 2: $y = 2x + q$.

6.2 Fascio generato da due rette

$$(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

Centro: si annullano tutte e due le parentesi (sistema). **Retta per P** : si sostituisce P , si ricava k , si rimette dentro.

QUANDO ti danno il fascio già scritto con il k . Ricorda che la seconda generatrice non si ottiene per nessun k : si dice che si ottiene per $k \rightarrow \pm\infty$, e in pratica è la risposta quando l'equazione in k non ne ha. Se il grado di k è maggiore di 1 non è un fascio ma una **famiglia**, e non ha né centro né direzione comune.

ESEMPIO

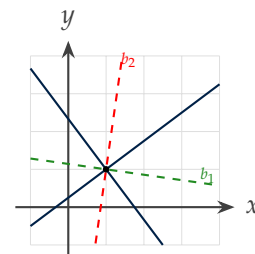
$(x - y + 2) + k(2x + y - 5) = 0$. Centro: dal sistema, $C(1;3)$.

Per $P(3;1)$: $4 + 2k = 0$, quindi $k = -2$, e la retta è $x + y - 4 = 0$. Controllo: passa per P ✓ e per C ✓.

6.3 Bisettrici fra due rette

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Togliendo i moduli l'equazione si **sdoppia**: caso + e caso -, cioè le due bisettrici.



QUANDO ti chiedono le bisettrici degli angoli, o il centro di una circonferenza tangente a due rette. Il caso - vuole il meno su **tutta** la parentesi.

ESEMPIO

$3x - 4y + 1 = 0$ e $4x + 3y - 7 = 0$: i denominatori valgono 5 entrambi e si semplificano.

Caso +: $x + 7y - 8 = 0$. Caso -: $7x - y - 6 = 0$.

Controllo gratis: $m_1 = -\frac{1}{7}$ e $m_2 = 7$ sono antireciproche, e le due bisettrici **devono** essere perpendicolari.

7 Quale formula, e quando**Scrivere l'equazione di una retta****Che cosa ti danno / ti chiedono****Che cosa usi**

l'equazione, e vuoi m e q

porta in esplicita, oppure $-a/b$ e $-c/b$

due punti

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, poi $y - y_1 = m(x - x_1)$

due punti con una coordinata uguale

scrivi $y = k$ o $x = h$, senza conti

le intercette sugli assi

segmentaria $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

un punto e la pendenza

$y - y_0 = m(x - x_0)$

un punto e una retta, «parallela»

stesso m , poi il fascio

un punto e una retta, «perpendicolare»

$m^* = -1/m$, poi il fascio

Rette fra loro, e costruzioni**Che cosa ti danno / ti chiedono****Che cosa usi**

«questo punto ci sta?»

sostituisci e guarda se torna

«per quale k ...»

sostituisci e risolvi in k

due rette, «dove si incontrano»

sistema, e leggi quale dei tre casi

un punto e una retta, «quanto dista»

implicita, poi $\frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

due parallele, «quanto distano»

un punto dell'una, distanza dall'altra

tre punti, «sono allineati?»

$m_{AB} = m_{BC}$

un segmento, «l'asse»

medio, antireciproco, fascio

un triangolo, «l'ortocentro»

due altezze, poi sistema

tre vertici, «il quarto»

$D = A + C - B$

un fascio e un punto

sostituisci, ricava k , rimetti dentro

due rette, «le bisettrici»

equidistanza, sdoppia il modulo

7.1 I controlli che costano dieci secondi

- Retta per due punti: **sostituiscili tutti e due.**
- Intersezione: sostituisci il punto nell'*altra* equazione.
- Perpendicolari: il prodotto delle pendenze dev'essere -1 esatto.
- Asse: il punto medio ci deve stare sopra.
- Fascio: la retta trovata passa per P e per il centro.
- Bisettrici: devono venire perpendicolari fra loro.

QUANDO sempre, prima di consegnare. Un errore di segno non si vede rileggendo, si vede solo sostituendo.

ESEMPIO

Il più economico di tutti resta il disegno fatto male: se la retta che hai trovato taglia l'asse y da una parte e il tuo q dice l'altra, c'è un segno sbagliato e lo trovi in due secondi.