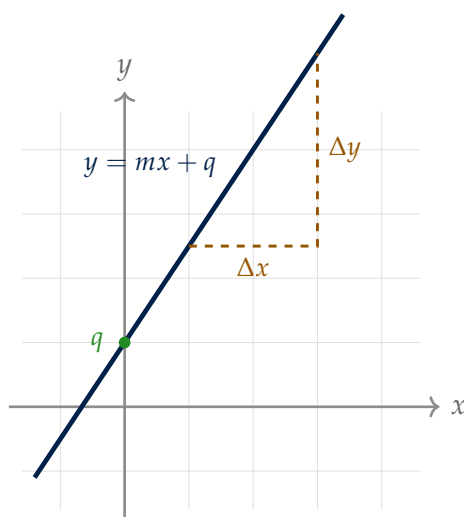


LA RETTA

GEOMETRIA ANALITICA

$y = mx + q$: pendenza, intercetta,
parallele, perpendicolari e distanze



IllogicoMatematico

Teoria, metodi ed errori tipici

Indice

1	Un'equazione che è una linea	3
2	Le due forme: esplicita e implicita	4
3	Il coefficiente angolare	6
4	La pendenza: l'angolo e la percentuale	7
5	Rette orizzontali e verticali	8
6	Retta per due punti	9
7	Retta per un punto con pendenza data	12
8	Appartenenza e problemi con parametro	13
9	Parallele e perpendicolari	13
10	Intersezione di due rette	17
11	Distanza punto-retta	19
12	Allineamento di tre punti	21
13	Asse, ortocentro, quarto vertice	22
14	Fasci di rette	25
15	Bisettrici degli angoli fra due rette	27
16	Quale formula, e quando	28

1 Un'equazione che è una linea

Fino a qui un'equazione era una domanda: «per quale x vale $3x - 1 = 5$?», e la risposta era un numero. Da adesso un'equazione è un **oggetto**: $y = 2x - 1$ non chiede niente, è una retta.

La differenza è tutta qui. Un'equazione in due incognite non ha «la» soluzione: ne ha infinite, una per ogni x che si sceglie. E quelle infinite coppie $(x; y)$, messe sul piano, non si sparpagliano a caso — si allineano. L'insieme dei punti che soddisfano l'equazione si chiama **luogo geometrico**, e per un'equazione di primo grado in x e y quel luogo è sempre una retta.

Formula 1.1: Luogo geometrico, e la retta come luogo: Un **luogo geometrico** è l'insieme di *tutti e soli* i punti che godono di una certa proprietà, detta **proprietà caratteristica** del luogo.

Nel piano cartesiano un luogo si studia cercando un'equazione in due incognite $f(x; y) = 0$ tale che

$$P(x_0; y_0) \text{ appartiene al luogo} \iff f(x_0; y_0) = 0$$

e quell'equazione si chiama **equazione del luogo**.

Le due parole che contano sono **tutti** e **soli**: se l'equazione è soddisfatta anche da un punto che non appartiene al luogo, non è l'equazione di quel luogo. La retta è il luogo dei punti allineati, e la sua equazione è lineare.

Una corrispondenza che vale in tutti e due i versi

Si dimostra che vale questa proprietà:

a ogni retta del piano corrisponde un'equazione lineare in due variabili e, viceversa, a ogni equazione lineare in due variabili corrisponde una retta.

È una **corrispondenza biunivoca**, ed è il permesso di lavorare sulle equazioni al posto delle rette: se ogni retta ha la sua equazione e ogni equazione la sua retta, dimostrare qualcosa sull'equazione lo dimostra sulla retta. È tutto il metodo di Cartesio in una riga.

Cosa devi già sapere

- **Il piano cartesiano.** Coordinate, distanza fra due punti, punto medio: l'asse di un segmento e l'ortocentro sono esercizi di questo capitolo costruiti su quelli.
- **Le equazioni di primo grado.** Passare da $ax + by + c = 0$ a $y = mx + q$ è isolare la y , niente di più.
- **I sistemi lineari.** L'intersezione di due rette è un sistema, e i suoi tre casi — determinato, impossibile, indeterminato — sono le tre posizioni possibili.
- **Le frazioni.** Il coefficiente angolare è quasi sempre una frazione, e l'antireciproco è

«capovolgi e cambia segno».

- **I radicali.** La distanza punto-retta ha una radice a denominatore, e la risposta va in forma normale.
- **Il valore assoluto.** La stessa distanza ha un modulo a numeratore, e le bisettrici nascono da un'uguaglianza fra due moduli, che si sdoppia.

Esempio Svolto 1.1: Un'equazione, infiniti punti:

Prendiamo $y = 2x - 1$ e proviamo qualche x :

x	-1	0	1	2	3
y	-3	-1	1	3	5

Cinque punti: $(-1; -3)$, $(0; -1)$, $(1; 1)$, $(2; 3)$, $(3; 5)$. Segnandoli sul piano si vede che stanno su una linea, e la linea non finisce dove finisce la tabella: ogni x reale, anche $\sqrt{2}$ o $-\frac{7}{3}$, dà un punto suo.

La domanda «quanto vale $y = 2x - 1$?» non ha risposta, ed è la domanda sbagliata. Quella giusta è: «dove sta $y = 2x - 1$?».

2 Le due forme: esplicita e implicita

Formula 2.1: Come si scrive una retta: Forma esplicita: $y = mx + q$

Forma implicita: $ax + by + c = 0$

Dalla implicita alla esplicita si passa isolando la y , e da lì si leggono i due parametri:

$$m = -\frac{a}{b} \quad q = -\frac{c}{b} \quad (\text{valide solo se } b \neq 0)$$

La forma implicita esiste **sempre**; quella esplicita no — le rette verticali non ce l'hanno.

Esempio Svolto 2.1: Da $2x - y - 3 = 0$ alla forma esplicita:

1. Si porta a sinistra il solo termine con la y :

$$-y = -2x + 3$$

2. Si cambiano tutti i segni (cioè si moltiplica per -1):

$$y = 2x - 3$$

Quindi $m = 2$ e $q = -3$. Con la formula rapida si ottiene lo stesso: $m = -\frac{2}{-1} = 2$ e $q = -\frac{-3}{-1} = -3$.

La formula $m = -a/b$ vuole il segno giusto di b

L'errore non è nella formula, è nel leggere b . In $2x - y - 3 = 0$ il coefficiente della y è $b = -1$, non 1: il meno fa parte del coefficiente. Chi scrive $b = 1$ ottiene $m = -2$ e disegna una retta che scende invece di salire.

Il controllo in due secondi: se x cresce, y deve crescere o calare? Su $y = 2x - 3$, con $x = 0$ viene $y = -3$ e con $x = 1$ viene $y = -1$. Sale. Quindi $m > 0$.

Formula 2.2: Che cosa succede se un coefficiente si annulla: Nell'implicita $ax + by + c = 0$ i parametri sono tre. Annullandone uno per volta (con a e b mai nulli insieme) si ottengono i casi particolari, e sono tutti quelli che esistono:

Se	diventa	cioè
$a = 0$	$by + c = 0$	$y = k$, parallela all'asse x
$b = 0$	$ax + c = 0$	$x = h$, parallela all'asse y
$c = 0$	$ax + by = 0$	passa per l' origine
$a = c = 0$	$by = 0$	$y = 0$, è l'asse x
$b = c = 0$	$ax = 0$	$x = 0$, è l'asse y

Il caso $c = 0$ si controlla in un secondo: sostituendo $O(0;0)$ resta $0 = 0$, vero per qualunque a e b . Se nell'equazione non c'è il termine noto, la retta passa per l'origine.

Formula 2.3: Le due forme non coprono le stesse rette: La forma esplicita $y = mx + q$, al variare di m e q , descrive tutte le rette **tranne** quelle parallele all'asse y . Quindi:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{equivale a} \quad y = mx + q \vee x = h$$

Non è un dettaglio da pignoli: è il motivo per cui l'implicita si tiene anche quando l'esplicita sarebbe più comoda, e il motivo per cui il fascio proprio va scritto con un $\vee$ in fondo (par. 14).

Perché la forma implicita non si butta via

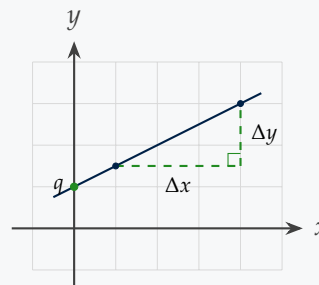
Sembra più scomoda, e per leggere la pendenza lo è. Ma serve in tre punti di questo capitolo dove l'esplicita non basta: la **distanza punto-retta** la pretende, le **bisettrici** pure, e i **fasci** si scrivono combinando due implicite. E soprattutto è l'unica forma che descrive anche $x = 3$.

Regola pratica: si ragiona in esplicita, si calcola in implicita.

3 Il coefficiente angolare

Formula 3.1: Che cosa sono m e q :

- **m è la pendenza:** di quanto sale y quando x avanza di uno. È il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- **q è l'ordinata all'origine:** il valore di y quando $x = 0$, cioè l'altezza a cui la retta taglia l'asse y , nel punto $(0; q)$.



Formula 3.2: I due modi di calcolare m : Da due punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$$

Dai coefficienti della forma implicita $ax + by + c = 0$:

$$m = -\frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

Non sono due formule diverse: la seconda si ottiene dalla prima passando per l'esplicita.

Esempio Svolto 3.1: Le due strade sullo stesso esempio:

Da due punti. $A(1; 2)$ e $B(3; 6)$:

$$m = \frac{6 - 2}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Dai coefficienti. $3x + 4y - 1 = 0$, quindi $a = 3$ e $b = 4$:

$$m = -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

Una pendenza frazionaria non è un errore: vuol dire che per salire di 3 bisogna avanzare di 4 — o meglio, qui, scendere di 3.

L'ordine dei punti non conta, ma dev'essere lo stesso sopra e sotto

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ danno lo stesso numero: si cambiano di segno numeratore e denominatore, e il segno si elide. Quello che **non** si può fare è mescolarli: $\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$ dà la pendenza col segno rovesciato.

Il controllo: se B sta più in alto e più a destra di A , la retta sale e m dev'essere positivo. Se il conto dà un negativo, hai mescolato.

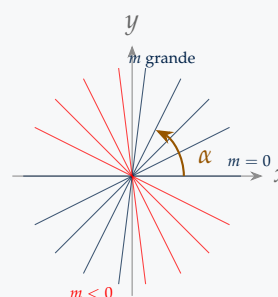
4 La pendenza: l'angolo e la percentuale

Formula 4.1: m e l'angolo con l'asse x :

Si chiama **angolo fra retta e asse x** l'angolo α che ha per vertice il punto d'intersezione e per lati la semiretta dei punti con ordinata positiva e il semiasse x positivo, misurato in senso antiorario.

Il valore di m dipende solo da quell'angolo — per questo si chiama **coefficiente angolare**:

- α nullo o piatto $\Rightarrow m = 0$;
- α **acuto** $\Rightarrow m > 0$, e cresce man mano che α si avvicina all'angolo retto;
- α **retto** $\Rightarrow m$ **non esiste**: sono le parallele all'asse y ;
- α **ottuso** $\Rightarrow m < 0$, e cresce in valore assoluto avvicinandosi all'angolo retto.



Esempio Svolto 4.1: Un angolo di 60° :

La retta passa per l'origine e forma con l'asse x un angolo di 60° . Dal triangolo con angoli di 30° e 60° : se $\overline{OA} = 1$ allora l'ipotenusa $\overline{OP} = 2$ e il cateto verticale $\overline{AP} = \sqrt{3}$, quindi $P(1; \sqrt{3})$ sta sulla retta.

Sostituendo in $y = mx$:

$$\sqrt{3} = m \cdot 1 \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

L'angolo si legge nella pendenza, e viceversa. Con 30° verrebbe $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, con 45° verrebbe $m = 1$.

Formula 4.2: La pendenza in percentuale: Nella vita fuori dalla scuola la pendenza si scrive in **percentuale**, ed è la stessa cosa:

$$\text{pendenza \%} = m \cdot 100$$

perché m è il rapporto fra lo spostamento verticale e quello orizzontale, e la percentuale è

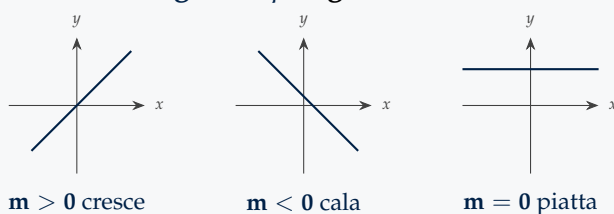
quel rapporto per cento.

Una rampa per disabili non può superare l'8%: vuol dire che ogni metro di avanzamento orizzontale (100 cm) può salire al massimo di 8 cm. Il profilo della rampa è la retta per l'origine e per $P(100; 8)$:

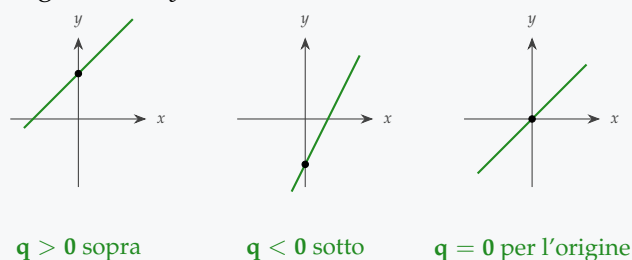
$$8 = m \cdot 100 \implies m = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} = 8\%$$

Un cartello stradale con «12%» sta dicendo $m = 0,12$. Un tetto a 100% è a 45° , non verticale: è l'errore che fanno tutti.

Formula 4.3: Il segno di m e il segno di q : Segno di m — come è inclinata:



Segno di q — dove taglia l'asse y :



5 Rette orizzontali e verticali

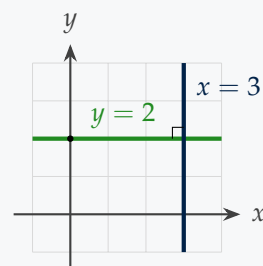
Formula 5.1: Le due rette che non stanno nella regola:

Orizzontale: $y = k$

Tutti i punti hanno la stessa ordinata. $m = 0$ (non c'è pendenza), $q = k$.

Verticale: $x = h$

Tutti i punti hanno la stessa ascissa. m **non è definito** — la formula darebbe uno zero a denominatore — e q non esiste, perché la retta l'asse y non lo taglia mai.



Formula 5.2: Rette per l'origine, e le due bisettrici: Se $q = 0$ l'equazione diventa $y = mx$ e la retta passa per l'origine: sostituendo $O(0;0)$ resta $0 = 0$, vero per ogni m .

Due di queste hanno un nome:

$$\begin{array}{lll} m = 1 & y = x & \text{bisettrice del I e III quadrante} \\ m = -1 & y = -x & \text{bisettrice del II e IV quadrante} \end{array}$$

Il perché è geometrico: con $m = 1$ un punto $P(k;k)$ e la sua proiezione $H(k;0)$ formano con l'origine un triangolo rettangolo *isoscele* (i cateti misurano tutti e due k), quindi l'angolo in O è metà dell'angolo retto: 45° . Con $m = -1$ vale lo stesso dall'altra parte.

« $m = \infty$ » non si scrive

Su una verticale la pendenza **non esiste**, e scrivere $m = \infty$ è dire una cosa falsa con un simbolo che sembra autorizzarla. L'infinito non è un numero: non ci si può moltiplicare, non lo si può mettere in $y = mx + q$, e l'antireciproco « $-1/\infty$ » non significa niente.

La formulazione giusta è: *la retta $x = 3$ non ha coefficiente angolare*. E infatti non ha nemmeno la forma esplicita: la si scrive solo come $x = 3$, oppure in implicita come $x - 3 = 0$.

Esempio Svolto 5.1: Rette speciali per un punto:

Per $P(4; 5)$, **parallela all'asse x** . È orizzontale, quindi tutti i suoi punti hanno l'ordinata di P :

$$y = 5 \quad (m = 0, q = 5)$$

Per $P(-2; 7)$, **parallela all'asse y** . È verticale, quindi tutti i suoi punti hanno l'ascissa di P :

$$x = -2 \quad (m \text{ non definito, } q \text{ inesistente})$$

Nessun calcolo: si legge la coordinata giusta e la si scrive.

6 Retta per due punti

Formula 6.1: La formula, e da dove viene:

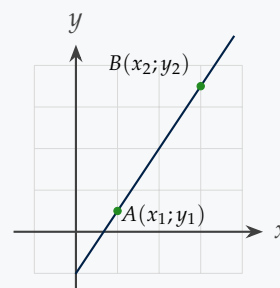
Per $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ distinti, con $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Non è una formula nuova: dice che la pendenza da A a un punto generico $(x; y)$ è la stessa che da A a B . Riscritta,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{con} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e questa vale anche quando $y_1 = y_2$.



Metodo 6.1: Guarda le coordinate PRIMA di applicare la formula:

1. I due punti hanno la stessa **ordinata** ($y_A = y_B$)? La retta è orizzontale: $y = y_A$, e hai finito.
2. Hanno la stessa **ascissa** ($x_A = x_B$)? La retta è verticale: $x = x_A$, e hai finito.
3. Altrimenti calcola m e usa $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Il controllo di dieci secondi ai punti 1 e 2 ti evita di dividere per zero e di riscrivere tutto da capo.

Esempio Svolto 6.1: Retta per $A(2; 1)$ e $B(4; 5)$:

Le coordinate sono tutte diverse, quindi si va di formula.

$$m = \frac{5 - 1}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y - 1 = 2(x - 2) \implies y - 1 = 2x - 4 \implies \mathbf{y = 2x - 3}$$

Il controllo: ci devono stare tutti e due i punti. $A: 2 \cdot 2 - 3 = 1 \checkmark$. $B: 2 \cdot 4 - 3 = 5 \checkmark$.

Esempio Svolto 6.2: Quando i punti sono allineati agli assi:

$A(5; 3)$ e $B(-2; 3)$: stessa ordinata, quindi $\mathbf{y = 3}$.

$A(4; -1)$ e $B(4; 7)$: stessa ascissa, quindi $\mathbf{x = 4}$.

Nel secondo caso la formula generale darebbe $x_2 - x_1 = 0$ a denominatore. Non è che «viene infinito»: è che non si può applicare.

Formula 6.2: Forma segmentaria: quando si conoscono le intercette:

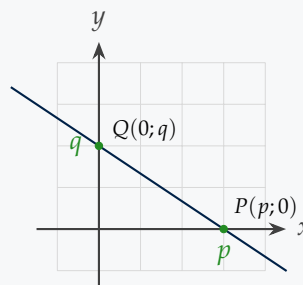
Se la retta taglia l'asse x in $P(p; 0)$ e l'asse y in

$Q(0; q)$:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

È il caso particolare della retta per due punti in cui i due punti sono proprio le intercette. Non vale se la retta passa per l'origine (verrebbe uno zero a denominatore) né se è parallela a un asse.

All'indietro, dalla implicita: $p = -\frac{c}{a}$ e $q = -\frac{c}{b}$.

**Esempio Svolto 6.3: Segmentaria con intercette 2 e 3:**

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

Si moltiplica tutto per il minimo comune multiplo 6:

$$3x + 2y = 6 \implies 3x + 2y - 6 = 0$$

e in esplicita $y = -\frac{3}{2}x + 3$. Si controlla che $q = 3$: torna con l'intercetta di partenza.

Metodo 6.2: Disegnare una retta: due punti bastano: Per due punti distinti passa una sola retta, quindi per il grafico servono **due punti**, non di più.

1. Scegli $x = 0$: ottieni subito $(0; q)$.
2. Scegli una seconda x comoda. Se m è una frazione, prendi un **multiplo del denominatore**, così la y viene intera.
3. Segna i due punti, tira la riga, prolunga da entrambe le parti.

Un terzo punto non serve a disegnare, ma serve a **controllare**: se non cade sulla riga, uno dei conti è sbagliato.

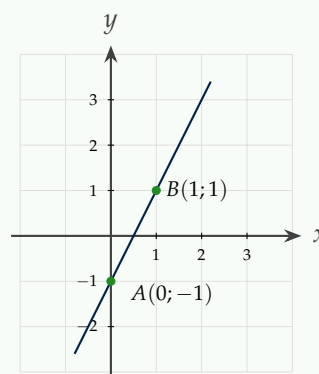
Esempio Svolto 6.4: Il grafico di $y = 2x - 1$:

Scegliamo $x = 0$ (l'intercetta) e $x = 1$:

- $x = 0 \Rightarrow y = -1$

- $x = 1 \Rightarrow y = 1$

x	y
0	-1
1	1



7 Retta per un punto con pendenza data

Formula 7.1: La formula più usata del capitolo: Dati un punto $P(x_0; y_0)$ e una pendenza m :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Si legge: «la pendenza da P a un punto qualunque della retta vale sempre m ». È la stessa cosa scritta sopra per due punti, con m dato invece che calcolato.

All'indietro: se conosci la retta e vuoi la pendenza, $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ con $(x; y)$ un altro punto suo.

Esempio Svolto 7.1: Per $P(1; 4)$ con $m = 3$:

$$y - 4 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 4 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x + 1$$

Controllo: $x = 1$ dà $y = 4$ ✓, e il coefficiente della x è 3 ✓.

Perché questa formula vale più delle altre

Quasi ogni esercizio del capitolo finisce qui dentro. La parallela per un punto, la perpendicolare per un punto, l'asse di un segmento, le altezze di un triangolo: in tutti si calcola prima una pendenza, poi si applica $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Se ne va imparata una sola, è questa: le altre si ricostruiscono.

8 Appartenenza e problemi con parametro

Formula 8.1: Un punto sta su una retta?: $P(x_P; y_P)$ appartiene a r se e solo se le sue coordinate ne soddisfano l'equazione. Si sostituisce e si guarda:

- viene un'identità vera ($5 = 5$): $P \in r$;
- viene una cosa falsa ($2 = 5$): $P \notin r$.

Non c'è nient'altro da sapere, e vale per qualunque curva: è la definizione stessa di «equazione di un luogo».

Esempio Svolto 8.1: Tre domande dello stesso tipo:

1. Verifica. $P(2; 5)$ sta su $y = 3x - 1$?

$$5 = 3(2) - 1 = 5 \checkmark \implies \mathbf{P \in r}$$

2. Punto con parametro. Per quale k il punto $P(k; 4)$ sta su $y = 2x$?

$$4 = 2k \implies \mathbf{k = 2}$$

3. Retta con parametro. Per quale k la retta $kx + 2y - 7 = 0$ passa per $P(1; 3)$?

$$k(1) + 2(3) - 7 = 0 \implies k - 1 = 0 \implies \mathbf{k = 1}$$

Sono la stessa operazione: sostituire. Cambia solo quale lettera resta incognita.

Sostituire non vuol dire «risolvere l'equazione»

Nella verifica non c'è niente da risolvere: si fanno i conti e si guarda se i due membri coincidono. Chi «risolve» $5 = 3x - 1$ trova $x = 2$ e poi non sa che farsene, perché la domanda non era quella.

La differenza: nella verifica **tutte** le lettere hanno un valore. Nel problema con parametro ne resta libera una, ed è quella che si risolve.

9 Parallele e perpendicolari

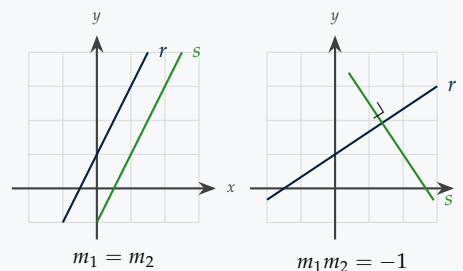
Formula 9.1: Le due condizioni:

Parallele ($r \parallel s$): stessa inclinazione, quindi

$$m_1 = m_2$$

Perpendicolari ($r \perp s$): pendenze **antireciproche** — capovolta e col segno cambiato:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{cioè} \quad m_1 \cdot m_2 = -1$$



Metodo 9.1: Dimostrazione: perché parallele vuol dire stesso m : Teorema. Due rette r ed s non parallele all'asse y , di equazioni $y = mx + q$ e $y = m_1x + q_1$, sono parallele **se e solo se** $m = m_1$.

Dimostrazione. Due rette sono parallele quando non hanno punti in comune oppure quando coincidono. In tutti e due i casi il sistema

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = m_1x + q_1 \end{cases}$$

non può essere determinato — se lo fosse, ci sarebbe un solo punto in comune e le rette sarebbero incidenti. Quindi dev'essere impossibile oppure indeterminato.

Col metodo del confronto:

$$mx + q = m_1x + q_1 \implies (m - m_1)x = q_1 - q$$

Un'equazione di primo grado $Ax = B$ è impossibile o indeterminata se e solo se $A = 0$. Quindi

$$m - m_1 = 0 \implies m = m_1$$

e viceversa. ■

Metodo 9.2: Dimostrazione: perché perpendicolari vuol dire $m m_1 = -1$: Teorema. Due rette non parallele agli assi sono perpendicolari **se e solo se** $m m_1 = -1$.

Dimostrazione. (1) Si portano le due rette per l'origine: $r' : y = mx$ e $s' : y = m_1x$, parallele a r ed s . Gli angoli fra r' e s' sono congruenti a quelli fra r ed s (angoli con i lati paralleli), quindi basta dimostrarlo per r' ed s' .

(2) Su r' e s' si prendono i punti di ascissa 1:

$$A(1; m) \quad B(1; m_1)$$

Il triangolo AOB è rettangolo in O se e solo se vale Pitagora: $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$.

(3) Si calcolano i tre quadrati con la formula della distanza:

$$\overline{AB}^2 = (m - m_1)^2 \quad \overline{OA}^2 = 1 + m^2 \quad \overline{OB}^2 = 1 + m_1^2$$

(4) Si sostituisce e si semplifica:

$$(m - m_1)^2 = (1 + m^2) + (1 + m_1^2)$$

$$m^2 + m_1^2 - 2m m_1 = 2 + m^2 + m_1^2$$

$$-2m m_1 = 2 \implies m m_1 = -1$$

■

Da qui si vede anche *perché* il prodotto fa proprio -1 e non un altro numero: viene dal $+2$ di Pitagora, cioè dai due punti presi ad ascissa 1.

Esempio Svolto 9.1: Riconoscerle a colpo d'occhio:

Parallele. $r : y = 2x + 1$ e $s : y = 2x - 5$. Stesso m , q diversi: parallele e distinte.

Perpendicolari. $r : y = \frac{2}{3}x + 1$ e $s : y = -\frac{3}{2}x + 4$.

$$\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \checkmark$$

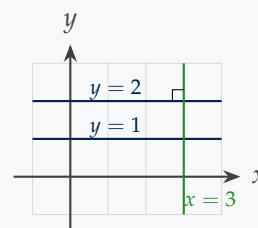
La frazione si è capovolta ($\frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{2}$) e ha cambiato segno.

Formula 9.2: I casi che la formula non copre:

Fra orizzontali e verticali le condizioni si leggono, non si calcolano:

- due orizzontali sono **sempre parallele**;
due verticali pure;
- un'orizzontale e una verticale sono **sempre perpendicolari**.

Il prodotto $m_1 m_2 = -1$ qui non si può nemmeno scrivere: una delle due pendenze non esiste.



Metodo 9.3: Parallela o perpendicolare per un punto: sempre tre passi:

1. **Trova m della retta data.** Se è in implicita, $m = -a/b$; se è verticale o orizzontale, salta al punto 3 e ragiona a parole.

2. Scegli m^* : uguale a m per la parallela, antireciproco $-1/m$ per la perpendicolare.
3. Applica il fascio: $y - y_P = m^*(x - x_P)$.

Esempio Svolto 9.2: I quattro casi standard:

1. **Parallela in esplicita.** Per $P(2; -1)$, parallela a $r: y = 3x + 4$. $m^* = 3$:

$$y + 1 = 3(x - 2) \implies y = 3x - 7$$

2. **Perpendicolare in esplicita.** Per $P(-3; 4)$, perpendicolare a $r: y = \frac{3}{2}x - 1$. $m^* = -\frac{2}{3}$:

$$y - 4 = -\frac{2}{3}(x + 3) \implies y = -\frac{2}{3}x + 2$$

3. **Parallela in implicita.** Per $P(1; 5)$, parallela a $s: 2x - 4y + 7 = 0$. $m_s = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$, quindi $m^* = \frac{1}{2}$:

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 1) \implies y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

4. **Perpendicolare in implicita.** Per $P(2; 0)$, perpendicolare a $s: 3x + y - 4 = 0$. $m_s = -3$, quindi $m^* = \frac{1}{3}$:

$$y = \frac{1}{3}(x - 2) \implies y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

Esempio Svolto 9.3: Gli stessi quattro casi, ma con rette speciali:

Punto di passaggio $P(4; -3)$. Qui non si calcola niente: si ragiona.

- Parallela a $x = 7$: la data è verticale, la parallela pure $\implies x = 4$ (l'ascissa di P).
- Perpendicolare a $x = 7$: diventa orizzontale $\implies y = -3$ (l'ordinata di P).
- Parallela a $y = 1$: resta orizzontale $\implies y = -3$.
- Perpendicolare a $y = 1$: diventa verticale $\implies x = 4$.

L'antireciproco è due operazioni, non una

Da $m = \frac{2}{3}$ la perpendicolare ha $m^* = -\frac{3}{2}$: si capovolge e si cambia segno. Farne una sola è l'errore più frequente del capitolo:

- solo il segno: $-\frac{2}{3}$ — è una retta che cala con la stessa inclinazione, non è perpendicolare;
- solo il capovolgimento: $\frac{3}{2}$ — sale ancora, ancora peggio.

Il controllo è gratis: moltiplica le due pendenze. Se non fa esattamente -1 , non sono

perpendicolari.

Il modo che funziona sempre, anche sulle verticali

Chi lavora sulla forma implicita non ha casi particolari. Da $r : ax + by + c = 0$:

- la parallela per P è $a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0$: si tengono a e b ;
- la perpendicolare per P è $b(x - x_P) - a(y - y_P) = 0$: si **scambiano** a e b e se ne cambia uno di segno.

Funziona anche su $x = 3$ e su $y = 2$, dove l'antireciproco non si potrebbe scrivere. È il modo in cui la macchina fa questo conto.

10 Intersezione di due rette

Formula 10.1: È un sistema, e i casi sono tre: Il punto comune a due rette appartiene a tutte e due, quindi soddisfa tutte e due le equazioni: si risolve il **sistema**.

$$\begin{cases} y = m_1x + q_1 \\ y = m_2x + q_2 \end{cases}$$

- Sistema **determinato** → un punto: rette **incidenti**.
- Sistema **impossibile** → nessun punto: rette **parallele e distinte** ($m_1 = m_2, q_1 \neq q_2$).
- Sistema **indeterminato** → infiniti punti: rette **coincidenti** ($m_1 = m_2, q_1 = q_2$).

Se sono entrambe in esplicita il metodo più rapido è il **confronto**: si uguagliano i secondi membri.

Formula 10.2: Riconoscere il caso senza risolvere: i rapporti: Date $r : ax + by + c = 0$ e $s : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, la posizione si legge dai rapporti fra i coefficienti, e non serve risolvere niente:

Rapporti	Posizione	Sistema
$\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$	incidenti	determinato
$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$	parallele distinte	impossibile
$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$	coincidenti	indeterminato

Scritti senza denominatori — che è come li usa una macchina, e come vanno usati quando

un coefficiente è nullo:

$$\text{parallele} \iff a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0 \quad \text{perpendicolari} \iff a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

Queste due valgono **sempre**, anche fra $y - 4 = 0$ e $2x + 5 = 0$, dove $m_1 m_2 = -1$ non si potrebbe scrivere: $0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 0 \checkmark$.

Esempio Svolto 10.1: $r : y = 2x - 1$ e $s : y = -x + 5$:

Per confronto:

$$2x - 1 = -x + 5$$

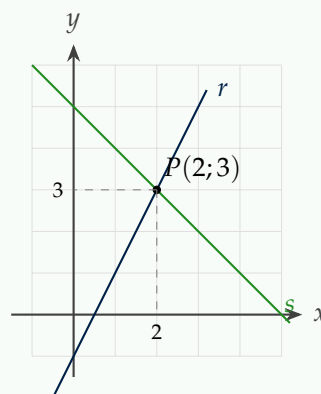
$$3x = 6 \implies x = 2$$

Si sostituisce in una delle due (in r):

$$y = 2(2) - 1 = 3$$

$$\mathbf{P(2; 3)}$$

Controllo: in s , $-2 + 5 = 3 \checkmark$. Va fatto nell'altra equazione, se no non controlla niente.



Esempio Svolto 10.2: I due casi degeneri:

Impossibile. $r : y = 2x + 1$, $s : y = 2x - 2$:

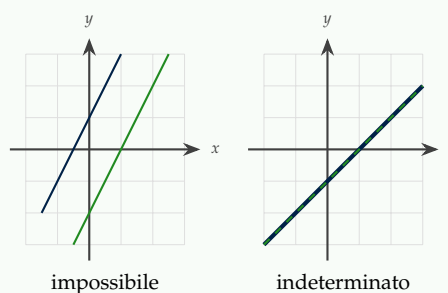
$$2x + 1 = 2x - 2 \implies 1 = -2$$

Falso: nessun punto in comune, parallele e distinte.

Indeterminato. $r : y = x - 1$, $s : 2x - 2y - 2 = 0$:

$$2x - 2(x - 1) - 2 = 0 \implies 0 = 0$$

Sempre vero: sono la stessa retta.



11 Distanza punto-retta

Formula 11.1: La formula, e la forma che pretende:

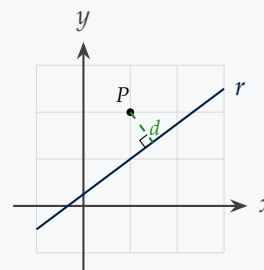
Dati $P(x_P; y_P)$ e la retta in forma implicita

$ax + by + c = 0$:

$$d = \frac{|a x_P + b y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

È la lunghezza del segmento **perpendicolare** da P alla retta: la distanza più corta fra tutte.

Il modulo a numeratore serve perché $ax_P + by_P + c$ cambia segno a seconda del lato da cui sta P ; la distanza no.

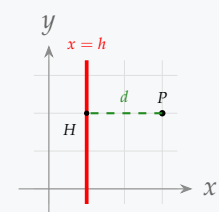
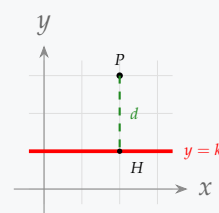


Formula 11.2: I casi facili: la retta è parallela a un asse:

Se la retta è **orizzontale** ($y = k$) la distanza è la differenza delle ordinate; se è **verticale** ($x = h$), quella delle ascisse:

$$d = |y_P - k| \qquad d = |x_P - h|$$

Qui la perpendicolare è parallela all'altro asse, e il segmento PH si conta sulla griglia. Applicare la formula generale funziona lo stesso, ma è tempo buttato.



Metodo 11.1: Da dove viene la formula: l'altezza sull'ipotenusa: La formula non si postula. Dato $P(x_P; y_P)$ e una retta r non parallela agli assi:

1. da P si tracciano le **parallele agli assi** finché incontrano r , nei punti A (stessa ordinata di P) e B (stessa ascissa di P);
2. il triangolo APB è **rettangolo in P** , perché i suoi cateti sono paralleli agli assi;
3. la distanza cercata $\overline{PH}$ è l'**altezza relativa all'ipotenusa AB** , e per il secondo teorema di Euclide (o semplicemente confrontando due modi di scrivere l'area)

$$\overline{PH} = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{\overline{AB}}$$

Facendo questo conto con le lettere, e non con dei numeri, esce la formula generale.

Esempio Svolto 11.1: $P(3; 1)$ e $r: 4x - 3y + 3 = 0$, prima senza formula:

Il punto A ha l'ordinata di P , cioè 1: sostituendo, $4x - 3 + 3 = 0$ dà $x = 0$, quindi $A(0; 1)$.

Il punto B ha l'ascissa di P , cioè 3: sostituendo, $12 - 3y + 3 = 0$ dà $y = 5$, quindi $B(3; 5)$.

I cateti misurano $\overline{PA} = 3$ e $\overline{PB} = 4$, quindi $\overline{AB} = 5$ (la solita terna). L'altezza sull'ipotenusa:

$$\overline{PH} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$$

E adesso con la formula, che deve dare lo stesso numero:

$$d = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{12}{5} \checkmark$$

In esplicita la formula dà il numero sbagliato

La formula legge a , b e c : se la retta è scritta $y = 3x - 2$ quei tre numeri non ci sono. Bisogna **prima** portarla in implicita, $3x - y - 2 = 0$, e solo lì leggere $a = 3$, $b = -1$, $c = -2$.

Chi applica la formula a $y = 3x - 2$ prendendo $a = 3$, $b = 1$, $c = -2$ ottiene un numero: sbagliato, ma plausibile, e quindi non se ne accorge.

Esempio Svolto 11.2: $P(1; 2)$ e $r: 3x - 4y + 1 = 0$:

$$d = \frac{|3(1) - 4(2) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 - 8 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-4|}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

La radice si è semplificata perché 3-4-5 è una terna pitagorica. Quando non si semplifica, la risposta resta un radicale in forma normale: $\frac{7}{\sqrt{5}}$ si scrive $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Metodo 11.2: Distanza fra due rette parallele: Due parallele distano uguale in ogni punto, quindi:

1. scegli un punto **qualsiasi** su una delle due (il più comodo: poni $x = 0$ oppure $y = 0$);
2. calcola la sua distanza dall'altra retta.

Se le due sono scritte con gli **stessi** a e b , c'è la scorciatoia

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ma vale *solo* in quel caso: fra $3x - 4y + 7 = 0$ e $6x - 8y - 6 = 0$ la scorciatoia darebbe $\frac{13}{5}$, e la risposta vera è 2.

Esempio Svolto 11.3: Fra $r : 3x - 4y + 7 = 0$ e $s : 3x - 4y - 3 = 0$:

Col punto. Su r , poniamo $y = 1$: $3x - 4 + 7 = 0$, quindi $x = -1$ e $P(-1; 1)$.

$$d = \frac{|3(-1) - 4(1) - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-10|}{5} = 2$$

Con la scorciatoia, lecita perché a e b coincidono:

$$d = \frac{|7 - (-3)|}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Due strade, lo stesso numero: è il controllo.

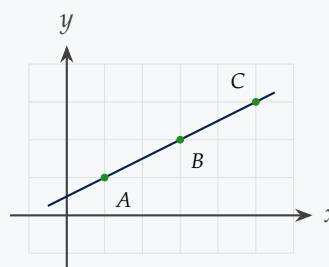
12 Allineamento di tre punti

Formula 12.1: Stessa pendenza, stessa retta:

Tre punti A, B, C sono **allineati** se i segmenti che li uniscono hanno la stessa inclinazione:

$$m_{AB} = m_{BC}$$

In alternativa: si scrive la retta per A e B e si verifica che C le appartenga. Stessa cosa, un passaggio in più.



Esempio Svolto 12.1: $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(5;3)$:

$$m_{AB} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2} \quad m_{BC} = \frac{3-2}{5-3} = \frac{1}{2}$$

Coincidono, quindi i tre punti sono allineati.

Se fossero venuti diversi, i tre punti formerebbero un triangolo — e l'area con il determinante, dal capitolo precedente, sarebbe diversa da zero. Sono lo stesso controllo scritto in due modi.

I tre criteri, e quando usare quale

L'allineamento si verifica in tre modi, e sono tutti e tre giusti:

Criterio	Quando conviene
$m_{AB} = m_{BC}$	quando hai già le pendenze in mano
$\det T = 0$	sempre: è un conto solo, e non ha casi speciali
$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$	quando ti serve sapere chi sta in mezzo

Il primo è quello di questo paragrafo e cade sulle verticali. Il secondo e il terzo stanno nel capitolo del piano cartesiano, ai paragrafi 8 e 4: il determinante non chiede di indovinare niente, le distanze pretendono di provare tre ordini ma in cambio dicono qual è il punto centrale — informazione che gli altri due non danno.

Con due punti in verticale la regola non si applica

Se A e B hanno la stessa ascissa, m_{AB} non esiste e il confronto non si può fare. In quel caso l'allineamento si legge a occhio: i tre punti sono allineati se e solo se hanno **tutti** la stessa ascissa.

Lo stesso vale in orizzontale, ma lì il conto funziona lo stesso perché m vale zero: il problema sono solo le verticali.

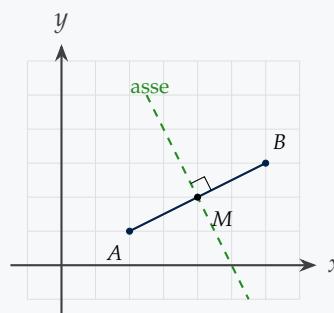
13 Asse, ortocentro, quarto vertice

Formula 13.1: L'asse di un segmento:

L'asse di AB è la retta perpendicolare ad AB e passante per il suo punto medio. È anche il luogo dei punti equidistanti da A e da B : le due definizioni descrivono la stessa retta.

Tre passi:

1. il punto medio M ;
2. la pendenza m_{AB} ;
3. l'antireciproco $m_{\perp}$, e il fascio per M .



Metodo 13.1: L'altra strada: l'asse come luogo dei punti equidistanti: L'asse è il **luogo** dei punti $P(x; y)$ tali che $\overline{PA} = \overline{PB}$ (par. 1). Si può quindi ricavarne l'equazione senza calcolare né il punto medio né l'antireciproco: basta **imporre l'equidistanza**.

$$\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$$

I due radicali sono non negativi, quindi si può elevare al quadrato senza perdere né aggiungere soluzioni. I termini x^2 e y^2 si semplificano da soli — è sempre così — e resta un'equazione di **primo** grado: una retta.

Le due strade danno la stessa equazione. La prima (medio + antireciproco) è più rapida a mano; questa dice *che cos'è l'asse*, e si riusa tale e quale per le bisettrici (par. 15) e, al triennio, per parabola e circonferenza.

Esempio Svolto 13.1: Lo stesso asse, con l'equidistanza: $A(-1;5)$, $B(3;1)$:

Si impone $\overline{PA} = \overline{PB}$ e si eleva al quadrato:

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1$$

$$2x - 10y + 26 = -6x - 2y + 10$$

$$8x - 8y + 16 = 0 \implies y = x + 2$$

Controllo con l'altra strada: $M(1;3)$, $m_{AB} = \frac{1-5}{3+1} = -1$, quindi $m_{\perp} = 1$ e $y - 3 = 1 \cdot (x - 1)$, cioè $y = x + 2$ ✓.

Esempio Svolto 13.2: Asse di $A(2;1)$ e $B(6;3)$:

1. **Punto medio:** $x_M = \frac{2+6}{2} = 4$, $y_M = \frac{1+3}{2} = 2$, quindi $M(4;2)$.

2. **Pendenza del segmento:** $m_{AB} = \frac{3-1}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3. **Pendenza dell'asse:** $m_{\perp} = -\frac{1}{1/2} = -2$.

4. **Equazione:** $y - 2 = -2(x - 4)$, cioè

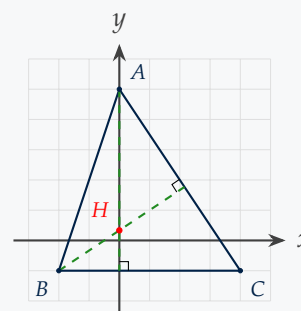
$$y = -2x + 10$$

Il controllo che vale la pena fare: M deve stare sull'asse ($-8 + 10 = 2$ ✓), e A e B devono distare uguale da un punto qualunque dell'asse.

Formula 13.2: L'ortocentro:

L'**ortocentro** H è il punto d'incontro delle tre **altezze**, e l'altezza da un vertice è la perpendicolare al lato opposto passante per quel vertice.

Le tre altezze si incontrano in un punto solo — è un teorema — e quindi **ne bastano due**: si scrivono le loro equazioni e si intersecano. Calcolare la terza è lavoro sprecato, ma è un ottimo controllo: ci deve passare.



Esempio Svolto 13.3: Ortocentro di $A(0;5)$, $B(-2;-1)$, $C(4;-1)$:

1. **Altezza da A.** B e C hanno la stessa ordinata, quindi BC è orizzontale e l'altezza è verticale per A:

$$x = 0$$

2. **Altezza da B.** Serve la pendenza di AC:

$$m_{AC} = \frac{-1-5}{4-0} = -\frac{3}{2} \implies m_{\perp} = \frac{2}{3}$$

e la retta per $B(-2;-1)$:

$$y+1 = \frac{2}{3}(x+2) \implies y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

3. **Intersezione.** Con $x = 0$ viene subito $y = \frac{1}{3}$:

$$\mathbf{H}\left(0; \frac{1}{3}\right)$$

Il caso orizzontale al punto 1 ha risparmiato metà del lavoro: conviene sempre guardare se un lato è parallelo a un asse.

Formula 13.3: Il quarto vertice di un parallelogramma: In un parallelogramma ABCD le diagonali si tagliano a metà, quindi AC e BD hanno lo stesso punto medio. Da $\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$ segue

$$D = A + C - B$$

cioè $x_D = x_A + x_C - x_B$ e $y_D = y_A + y_C - y_B$. Vale anche per rettangoli, rombi e quadrati, che sono parallelogrammi.

Esempio Svolto 13.4: Due quarti vertici:

Vertici consecutivi $A(1;2)$, $B(4;1)$, $C(5;4)$:

$$x_D = 1 + 5 - 4 = 2 \quad y_D = 2 + 4 - 1 = 5 \quad \mathbf{D(2; 5)}$$

Vertici consecutivi $A(1;1)$, $B(5;-1)$, $C(8;5)$:

$$x_D = 1 + 8 - 5 = 4 \quad y_D = 1 + 5 + 1 = 7 \quad \mathbf{D(4; 7)}$$

L'ordine conta: B dev'essere il vertice *in mezzo* agli altri due. Scambiandolo si ottiene un altro parallelogramma, che è comunque una figura valida ma non quella chiesta.

14 Fasci di rette

Formula 14.1: Fascio proprio: tutte le rette per un punto:

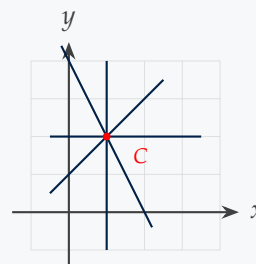
Fissato $C(x_0; y_0)$, detto **centro**, le rette che ci passano sono

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

una per ogni valore di m .

Attenzione: così scritto, il fascio è incompleto. La **verticale** per C non ha m e non si ottiene per nessun valore. Il fascio completo è

$$y - y_0 = m(x - x_0) \cup x = x_0$$



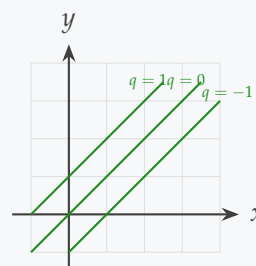
Formula 14.2: Fascio improprio: tutte le parallele a una direzione:

Fissata la pendenza m , le rette con quella pendenza sono

$$y = mx + q$$

una per ogni q . Qui m è **noto** e q è il parametro che varia: è il contrario del fascio proprio.

Non c'è centro: le rette non si incontrano mai. Si dice che hanno in comune la direzione.



Formula 14.3: Fascio generato da due rette: Date due equazioni $A(x; y) = 0$ e $B(x; y) = 0$, si chiama **combinazione lineare** ogni equazione della forma

$$p \cdot A(x; y) + q \cdot B(x; y) = 0 \quad p, q \in \mathbb{R} \text{ non entrambi nulli}$$

Se una coppia $(c; d)$ soddisfa tutte e due le equazioni di partenza, soddisfa anche ogni loro combinazione lineare: $p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0$. È tutta qui la ragione per cui il centro del fascio sta su ogni retta del fascio.

Supponendo $p \neq 0$ si divide tutto per p e, posto $k = \frac{q}{p}$, restano **due** generatrici e **un** parametro:

$$(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

- r e s **incidenti** $\rightarrow$ fascio **proprio**, di centro il loro punto d'intersezione. Succede quando $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$;
- r e s **parallele** $\rightarrow$ fascio **improprio**, della loro stessa pendenza.

La seconda generatrice non si ottiene mai

Per $k = 0$ si ottiene r . La retta s , invece, non esce per **nessun** valore di k : è il prezzo di aver diviso per p .

Si può vedere dove è finita. Dividendo l'equazione del fascio per k :

$$\frac{1}{k}(a_1x + b_1y + c_1) + (a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

e facendo crescere k oltre ogni limite, $\frac{1}{k}$ diventa sempre più piccolo: al limite resta $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, cioè proprio s . Si dice che s si ottiene per $k \rightarrow \pm\infty$.

In pratica: quando un esercizio chiede «la retta del fascio che...» e il conto in k non ha soluzione, la risposta di solito è s .

Fascio improprio verticale, e famiglie di rette

Due casi che capita di incontrare e che non sono fasci come gli altri:

Il fascio improprio di rette verticali. Se la direzione è quella dell'asse y , la scrittura $y = mx + q$ non serve a niente: il fascio è semplicemente $x = k$, al variare di k .

Le famiglie. Se in un'equazione parametrica il grado del parametro è maggiore di 1, non si ha un fascio ma una **famiglia** di rette, che possono essere fra loro parallele o incidenti. Per esempio in $(k^2 - 1)x + ky + 2 = 0$:

- $k = 1$ dà $y + 2 = 0$, cioè $y = -2$;
- $k = -1$ dà $-y + 2 = 0$, cioè $y = 2$;
- $k = 0$ dà $-x + 2 = 0$, cioè $x = 2$.

Le prime due sono parallele fra loro, la terza le taglia entrambe: non c'è nessun punto comune a tutte, e non c'è nessuna direzione comune. Non è un fascio.

Metodo 14.1: I due conti che si chiedono su un fascio:

1. **Il centro:** si mettono a sistema le due generatrici, cioè si annullano tutte e due le parentesi. Il punto che le annulla entrambe sta su ogni retta del fascio, qualunque sia k .
2. **La retta per un punto P :** si sostituiscono le coordinate di P nell'equazione del fascio, si ricava k , e si rimette quel k dentro.

Esempio Svolto 14.1: Fascio $(x - y + 2) + k(2x + y - 5) = 0$:

1. Il centro. Si annullano le due parentesi:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro: $3x - 3 = 0$, quindi $x = 1$; dalla prima $y = 3$. Il centro è **C(1; 3)**.

2. La retta per P(3; 1). Si sostituisce:

$$(3 - 1 + 2) + k(6 + 1 - 5) = 0 \implies 4 + 2k = 0 \implies k = -2$$

e si rimette dentro:

$$(x - y + 2) - 2(2x + y - 5) = 0$$

$$x - y + 2 - 4x - 2y + 10 = 0 \implies -3x - 3y + 12 = 0$$

Dividendo per -3 : **$x + y - 4 = 0$** .

Controllo: la retta trovata deve passare sia per P ($3 + 1 - 4 = 0 \checkmark$) sia per il centro C ($1 + 3 - 4 = 0 \checkmark$).

15 Bisettrici degli angoli fra due rette

Formula 15.1: Il luogo dei punti equidistanti: Due rette incidenti formano quattro angoli, e le loro bisettrici sono **due rette perpendicolari fra loro**. Un punto sta su una bisettrice quando dista uguale dalle due rette:

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Togliendo i moduli l'equazione **si sdoppia** nei casi $+$ e $-$: da lì le due bisettrici.

Esempio Svolto 15.1: Bisettrici di $r: 3x - 4y + 1 = 0$ e $s: 4x + 3y - 7 = 0$:

1. I denominatori valgono tutti e due 5:

$\sqrt{9+16} = \sqrt{16+9} = 5$. Si semplificano.

$$|3x - 4y + 1| = |4x + 3y - 7|$$

2. **Caso +:**

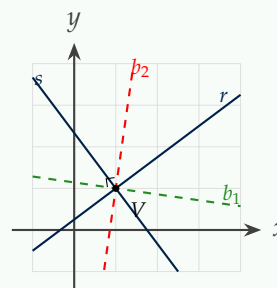
$$3x - 4y + 1 = 4x + 3y - 7$$

$$-x - 7y + 8 = 0 \implies x + 7y - 8 = 0$$

3. **Caso -:**

$$3x - 4y + 1 = -(4x + 3y - 7)$$

$$7x - y - 6 = 0 \implies 7x - y - 6 = 0$$



Il controllo che questo esercizio si porta dietro gratis

Le due bisettrici sono **sempre** perpendicolari fra loro. Qui $m_1 = -\frac{1}{7}$ e $m_2 = 7$: antireciproche ✓.

È un autocontrollo che costa dieci secondi e smaschera quasi ogni errore di segno commesso nello sdoppiamento. Se le due bisettrici non risultano perpendicolari, il caso - è stato distribuito male: il meno va a **tutti** i termini della parentesi, non solo al primo.

16 Quale formula, e quando

Formula 16.1: La tabella da tenere davanti:

Che cosa ti danno	Che cosa usi
l'equazione, e vuoi m e q	porta in esplicita, oppure $-a/b$ e $-c/b$
due punti	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, poi $y - y_1 = m(x - x_1)$
due punti con una coordinata uguale	scrivi $y = k$ o $x = h$, senza conti
le intercette sugli assi	segmentaria $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
un punto e la pendenza	$y - y_0 = m(x - x_0)$
un punto e una retta, «parallela»	stesso m , poi il fascio
un punto e una retta, «perpendicolare»	$m^* = -1/m$, poi il fascio
due rette, «dove si incontrano»	sistema, e leggi quale dei tre casi
un punto e una retta, «quanto dista»	implicita, poi $\frac{ ax_p + by_p + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$
due parallele, «quanto distano»	un punto dell'una, distanza dall'altra
tre punti, «sono allineati?»	$m_{AB} = m_{BC}$
un segmento, «l'asse»	medio, antireciproco, fascio
un triangolo, «l'ortocentro»	due altezze, poi sistema
un fascio e un punto	sostituisci, ricava k , rimetti dentro
due rette, «le bisettrici»	equidistanza, sdoppia il modulo

Esempio Svolto 16.1: Un problema che ne usa quattro:

«Del triangolo $A(0;5)$, $B(-2;-1)$, $C(4;-1)$ scrivi la retta AC , l'asse di BC e la distanza di B da AC .»

La retta AC → due punti. $m = \frac{-1-5}{4-0} = -\frac{3}{2}$, e per $A(0;5)$: $y = -\frac{3}{2}x + 5$. In implicita: $3x + 2y - 10 = 0$.

L'asse di BC → medio e antireciproco. B e C hanno la stessa ordinata, quindi BC è orizzontale, $M(1;-1)$ e l'asse è verticale: $x = 1$.

La distanza di B da AC → formula, in implicita:

$$d = \frac{|3(-2) + 2(-1) - 10|}{\sqrt{9+4}} = \frac{18}{\sqrt{13}} = \frac{18\sqrt{13}}{13}$$

Tre domande, tre righe della tabella. E il caso orizzontale al secondo punto ha evitato tutto il giro dell'antireciproco: guardare le coordinate prima di calcolare paga sempre.

Dove si va da qui

La retta è lo strumento con cui si studiano tutte le curve che vengono dopo. La **parabola** si incontra con una retta risolvendo un sistema come quello del paragrafo 9, solo di secondo grado; la **tangente** a una circonferenza è la retta che dista dal centro esattamente quanto il raggio — cioè il paragrafo 10; e in analisi la derivata di una funzione in un punto è il coefficiente angolare della tangente in quel punto.

Detto altrimenti: quello che si impara qui non si smette mai di usarlo.

Indice analitico

allineamento, 21
angolo, 7
appartenenza, 13
asse di un segmento, 22

bisettrice, 9, 27

coefficiente angolare, 6
combinazione lineare, 25
corrispondenza biunivoca, 3

distanza punto-retta, 19

famiglia di rette, 26
fascio improprio, 25
fascio proprio, 12, 25
forma esplicita, 4
forma implicita, 4
forma segmentaria, 9

intersezione, 17

luogo geometrico, 3

ortocentro, 22

parametro, 13
pendenza, 6, 7
proprietà caratteristica, 3

retta, 3
retta orizzontale, 8
retta per due punti, 9
retta per un punto, 12
retta verticale, 8
rette parallele, 13
rette perpendicolari, 13