

FORMULARIO: LA PARABOLA

Un **luogo geometrico**: i punti equidistanti da un punto e da una retta. Ogni formula qui sotto si ricava da lì, e ogni risposta si può controllare tornandoci. In ogni riquadro c'è il metodo, la riga **QUANDO** e un esempio con i numeri.

1 La definizione, e le quattro formule

1.1 La definizione

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

F è il **fuoco**, d la **direttrice**, H il piede della perpendicolare da P a d . L'**asse** passa per F ed è perpendicolare a d ; il **vertice** sta a metà fra F e d .

QUANDO il testo dà fuoco e direttrice, o quando un risultato va controllato senza rifare i conti.

ESEMPIO

Con $F(0;2)$ e $d: y = -2$, il punto $P(4;2)$ ci sta: $\overline{PF} = 4$ e $\overline{PH} = |2 + 2| = 4$.

Le quattro formule, e quando si scambiano

	$y = ax^2 + bx + c$	$x = ay^2 + by + c$
asse	$x = -\frac{b}{2a}$	$y = -\frac{b}{2a}$
vertice	$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$	$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$
fuoco	$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$	$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$
direttrice	$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$	$x = -\frac{1+\Delta}{4a}$

Con $\Delta = b^2 - 4ac$. La colonna di destra è quella di sinistra con le coordinate **scambiate**: usare $-\frac{b}{2a}$ come ascissa è l'errore tipico di quella sezione.

1.2 Vertice nell'origine: il caso più semplice

$$y = ax^2, \quad F\left(0; \frac{1}{4a}\right), \quad d: y = -\frac{1}{4a}$$

QUANDO il vertice è in O e l'asse è un asse cartesiano — succede in quasi tutti i problemi «reali» (antenne, archi, getti d'acqua), perché il sistema di riferimento lo si sceglie così apposta.

ESEMPIO

$y = 2x^2$ ha $F\left(0; \frac{1}{8}\right)$ e $d: y = -\frac{1}{8}$: il fuoco è vicinissimo al vertice, e infatti la parabola è stretta.

1.3 La forma con il vertice

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

QUANDO il vertice è **dato**. Evita di scrivere un sistema in tre incognite: due coefficienti sono già dentro, e resta solo a .

ESEMPIO

Vertice $V(2; -1)$ e passaggio per $A(0; 7)$: $7 + 1 = a \cdot 4$ dà $a = 2$, quindi $y = 2x^2 - 8x + 7$.

2 Concavità, apertura, grafico

2.1 Il segno e il valore di a dicono due cose diverse

- **segno** → concavità: $a > 0$ in alto, $a < 0$ in basso;
- **valore assoluto** → apertura: $|a|$ grande $\Rightarrow$ parabola **stretta**.

QUANDO devi confrontare due parabole, o disegnarne una a occhio.

ESEMPIO

È il contrario di quello che sembra. Il modo di non sbagliare è non ricordarselo: si sostituisce $x = 1$ e si guarda chi è più in alto. Con $y = \frac{1}{4}x^2$ viene $\frac{1}{4}$, con $y = 2x^2$ viene 2: la seconda sale prima, quindi è più stretta.

2.2 I cinque passi per disegnare

1. concavità dal segno di a ;
2. vertice: $x_V = -\frac{b}{2a}$, poi **sostituisci**;
3. asse y : $x = 0$ dà $(0; c)$ — gratis;
4. asse x : risolvi $ax^2 + bx + c = 0$;
5. due punti simmetrici rispetto all'asse.

QUANDO la consegna dice «rappresenta graficamente».

ESEMPIO

Il passo 5 costa una sostituzione e dà due punti, perché l'asse è asse di simmetria.

2.3 Che cosa manca nell'equazione

$y = ax^2 + c$	vertice $V(0; c)$, asse $x = 0$
$y = ax^2 + bx$	passa per l'origine
$y = ax^2$	vertice in O

QUANDO prima di applicare le formule generali: spesso non servono.

ESEMPIO

$y = x^2 - 4x$ ha $c = 0$: passa per l'origine, e gli zeri si trovano raccogliendo, $x(x - 4) = 0$.

2.4 Il Δ conta le intersezioni con l'asse x

$\Delta > 0$ due, $\Delta = 0$ una (nel vertice, tangente), $\Delta < 0$ nessuna.

QUANDO ti chiedono dove taglia l'asse x , o se lo taglia.

ESEMPIO

Se $\Delta = 0$ allora $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 0$: il vertice sta sull'asse x , e la curva lo tocca senza attraversarlo.

2.5 Massimo e minimo

Il vertice dà il **minimo** se $a > 0$, il **massimo** se $a < 0$, e vale $-\frac{\Delta}{4a}$.

QUANDO un problema chiede «quanto conviene», «qual è l'altezza massima», «qual è il costo minimo».

ESEMPIO

Poi si controlla che il vertice sia ammissibile. Se x_V cade fuori dall'intervallo del problema, l'ottimo sta in un estremo. È lo stesso controllo delle soluzioni non accettabili nelle equazioni fratte.

3 Rette e parabole

3.1 L'equazione risolvente

$$ax^2 + bx + c = mx + q \implies ax^2 + (b - m)x + (c - q) = 0$$

Il suo Δ : > 0 **secante**, $= 0$ **tangente**, < 0 **esterna**.

QUANDO devi stabilire la posizione di una retta.

ESEMPIO

Non è il Δ della parabola. Quello è $b^2 - 4ac$ e conta le intersezioni con l'asse x . In un esercizio con una tangente ci sono tutti e due, e vanno su due righe diverse.

3.2 La retta parallela all'asse

Una retta $x = k$ non ha coefficiente angolare: non entra nel sistema con $y = mx + q$, e il criterio del Δ non la riguarda. Incontra la parabola in **un solo punto** e **non** è tangente.

QUANDO vedi una retta verticale, o quando qualcuno conclude «un solo punto, quindi tangente».

ESEMPIO

È il quarto caso, e nei libri sta in fondo alla figura: si sostituisce $x = k$ e si legge la y . Fine.

3.3 Tangente in un punto della parabola

$$m = 2ax_0 + b \quad \text{oppure} \quad \frac{y + y_0}{2} = a x x_0 + b \frac{x + x_0}{2} + c$$

QUANDO il punto **appartiene** alla curva — si controlla sostituendo.

ESEMPIO

Con $y = -2x^2 + 3x + 1$ e $P(2; -1)$: $m = -8 + 3 = -5$, quindi $y = -5x + 9$. Lo sdoppiamento dà la stessa retta in una riga.

3.4 Tangenti da un punto *fuori* dalla parabola

1. fascio per P : $y = m(x - x_0) + y_0$;
2. sistema con la parabola;
3. $\Delta = 0$: equazione in m ;
4. sostituisci i valori trovati.

QUANDO il punto **non** sta sulla curva. Due soluzioni: P è esterno; una: ci sta sopra; nessuna: è interno.

ESEMPIO

Da $P(1; -5)$ a $y = x^2 - 2$: $\Delta = m^2 - 4m - 12 = 0$ dà $m = -2$ e $m = 6$, cioè $y = -2x - 3$ e $y = 6x - 11$.

3.5 Area del segmento parabolico

$$S = \frac{2}{3} \mathcal{A}_{AA'B'B} \quad \text{oppure} \quad S = \frac{|a| |x_B - x_A|^3}{6}$$

QUANDO una secante taglia la parabola e si chiede l'area fra corda e arco.

ESEMPIO

La seconda forma è la prima con il rettangolo già semplificato: comodo perché la corda e l'altezza sono spesso irrazionali, e nel prodotto i radicali se ne vanno.

Con $y = x^2 - 5x + 7$ e $y = x - 1$: $A(2; 1)$, $B(4; 3)$, e $S = \frac{1 \cdot 8}{6} = \frac{4}{3}$.

4 Determinare l'equazione

4.1 Tre coefficienti, tre condizioni

passaggio per un punto	una
vertice	due
fuoco	due
asse, oppure direttrice	una
tangenza a una retta	una ($\Delta = 0$)

QUANDO il testo elenca delle proprietà e chiede l'equazione.

ESEMPIO

«Passa per A e ha fuoco in F » sono **tre** condizioni, non due. «Passa per A e per B » sono due, e non

bastano: le parabole per due punti sono infinite.

4.2 Attenzione alle due soluzioni

Se fra le condizioni c'è il **fuoco** o una **tangenza**, il sistema contiene Δ ed è di secondo grado in a : le parabole possono venire **due**, e vanno scritte tutte e due.

QUANDO il sistema dà due terne (a, b, c) e viene il dubbio di aver sbagliato.

ESEMPIO

Per $P(-1; 2)$ con fuoco $F(-2; \frac{5}{4})$ vengono $y = x^2 + 4x + 5$ e $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{5}{4}$: lo stesso fuoco va bene per una parabola in su e per una in giù.

5 Fasci

5.1 Generatrici, punti base, degeneri

$$(y - a_1x^2 - b_1x - c_1) + k(y - a_2x^2 - b_2x - c_2) = 0$$

- **generatrici**: $k = 0$, e il pezzo moltiplicato per k ;
- **punti base**: le intersezioni delle generatrici;
- **degeneri**: si annulla il coefficiente di x^2 , oppure quello di y .

QUANDO nell'equazione compare un parametro e il testo dice «fascio», o chiede che cosa hanno in comune tutte le curve.

ESEMPIO

I punti base possono essere **due, uno o nessuno**: se le generatrici non si incontrano, il fascio non ne ha — e non è un errore.

5.2 Due fasci che si scrivono a memoria

$$\begin{aligned} \text{per } A \text{ e } B : \quad & y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B) \\ \text{tangenti in } T \text{ a } r : \quad & y = mx + q + k(x - x_T)^2 \end{aligned}$$

con $y = mx + q$ la retta AB (o la retta r).

QUANDO il testo chiede «tutte le parabole che...» invece di una sola.

ESEMPIO

Funzionano perché in x_A il termine con k si annulla e resta $y = y_A$: la curva ci passa qualunque sia k .

6 Prima di consegnare

6.1 Il controllo che costa dieci secondi

Prendi un punto della curva e verifica che disti ugualmente dal **fuoco** e dalla **direttrice** che hai trovato.

QUANDO sempre, e soprattutto quando hai usato le formule a memoria.

ESEMPIO

È l'unica verifica che non ripercorre la strada dei conti: se hai sbagliato un segno nella formula del fuoco, rifarla non te lo dice — sostituire nella definizione sì.

6.2 Gli errori che il compito becca

- $-\frac{b}{2a}$ usato come *ascissa* in una parabola con asse orizzontale;
- i due Δ confusi;
- «un solo punto, quindi tangente»;
- $m = 2ax_0 + b$ usato con un punto che non sta sulla curva;
- il fuoco contato come *una* condizione;
- il vertice preso come ottimo senza controllare che sia ammissibile;
- « $|a|$ grande, parabola larga».

QUANDO rileggi.

ESEMPIO

Il primo e l'ultimo sono i più frequenti, e tutti e due si evitano con dieci secondi di disegno a mano libera.