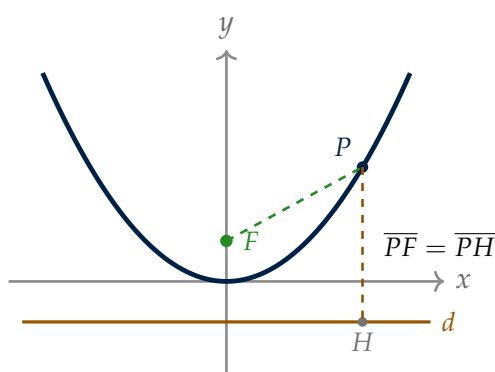


LA PARABOLA

05 - GEOMETRIA ANALITICA



Un punto, una retta, e tutti i punti che stanno in mezzo

Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	La parabola è un luogo, non una formula	3
3	L'equazione più semplice: $y = ax^2$	5
4	Concavità e apertura	6
5	Traslare la parabola: $y = ax^2 + bx + c$	8
6	Vertice, asse, fuoco, direttrice	9
7	Dall'equazione al grafico	11
8	I casi particolari	12
9	Intersezioni con l'asse x , e il Δ	13
10	La parabola come funzione: massimi e minimi	13
11	Parabola con asse parallelo all'asse x	14
12	Rette e parabole	16
13	Rette tangenti	17
14	Area del segmento parabolico	19
15	Determinare l'equazione di una parabola	20
16	Fasci di parabole	22
17	La proprietà ottica	23
18	Quale strada, e quando	25

1 Cosa serve prima di partire

Cosa devi già sapere

- **Distanza fra due punti:** $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- **Distanza punto-retta:** da $P(x_0; y_0)$ alla retta $ax + by + c = 0$ vale $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Se la retta è *orizzontale* ($y = k$) la distanza è semplicemente $|y_0 - k|$, ed è il caso che serve qui.
- **Retta:** forma esplicita $y = mx + q$, e il **fascio proprio** delle rette per $P(x_0; y_0)$, cioè $y - y_0 = m(x - x_0)$.
- **Equazioni di secondo grado** e soprattutto il **discriminante**: $\Delta > 0$ due soluzioni, $\Delta = 0$ una, $\Delta < 0$ nessuna (nei reali).
- **Sistemi non lineari:** si sostituisce, e resta un'equazione in una sola incognita — *l'equazione risolvente*.
- **Traslazioni:** $x' = x + a$, $y' = y + b$, e le inverse $x = x' - a$, $y = y' - b$.
- $\sqrt{A^2} = |A|$, non A . Serve in un passaggio preciso, ed è lì che si sbaglia.

Esempio Svolto 1.1: I due prerequisiti che useremo subito: Distanza fra due punti. Da $P(2;3)$ a $F(0;1)$:

$$\overline{PF} = \sqrt{(0-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}.$$

Distanza da una retta orizzontale. Da $P(2;3)$ alla retta $y = -1$: si guarda solo la differenza delle ordinate,

$$\overline{PH} = |3 - (-1)| = 4.$$

Non serve la formula generale: la perpendicolare a una retta orizzontale è verticale, e la distanza è il salto in verticale.

Queste due distanze, messe **uguali**, sono tutta la parabola.

2 La parabola è un luogo, non una formula

Formula 2.1: Definizione: Dati nel piano un punto F e una retta d che non passa per F , si chiama **parabola** l'insieme dei punti del piano **equidistanti da F e da d** :

$$\overline{PF} = \overline{PH},$$

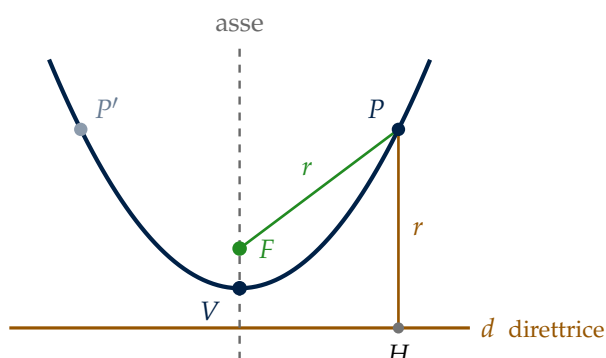
dove H è il piede della perpendicolare condotta da P a d .

Il punto F è il **fuoco**, la retta d è la **direttrice**.

Da questa definizione discende tutto il resto, e conviene dare subito i nomi alle parti.

Formula 2.2: Asse e vertice:

- l'**asse** della parabola è la retta che passa per F ed è *perpendicolare* alla direttrice;
- il **vertice** V è il punto in cui la parabola incontra il proprio asse.



Formula 2.3: Teorema: l'asse è asse di simmetria: Se P appartiene alla parabola, anche il suo simmetrico P' rispetto all'asse le appartiene.

Dimostrazione. La simmetria rispetto all'asse manda F in sé (perché F sta sull'asse) e manda la direttrice d in sé (perché d è perpendicolare all'asse). Una simmetria assiale conserva le distanze, quindi

$$\overline{P'F} = \overline{PF} \quad \text{e} \quad \text{dist}(P', d) = \text{dist}(P, d).$$

Ma $\overline{PF} = \text{dist}(P, d)$ perché P è sulla parabola: allora anche $\overline{P'F} = \text{dist}(P', d)$, cioè P' è sulla parabola. ■

Esempio Svolto 2.1: Un punto ci sta o no? Si controlla con la definizione: Sia $F(0;2)$ il fuoco e $d: y = -2$ la direttrice. I punti $P(4;2)$ e $Q(4;3)$ stanno sulla parabola?

Non serve nessuna equazione: basta misurare le due distanze.

Per $P(4;2)$:

$$\overline{PF} = \sqrt{(0-4)^2 + (2-2)^2} = 4, \quad \overline{PH} = |2 - (-2)| = 4.$$

Uguali: **P** sta sulla parabola.

Per $Q(4;3)$:

$$\overline{QF} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \approx 4,12, \quad \overline{QH} = |3 - (-2)| = 5.$$

Diverse, e $\overline{QF} < \overline{QH}$: Q è più vicino al fuoco che alla direttrice, quindi sta **dentro** la parabola — dalla parte del fuoco.

Questo criterio serve anche più avanti: nella dimostrazione della proprietà ottica (par. 17) un punto risulta *fuori* proprio perché dista dal fuoco più che dalla direttrice.

Perché «luogo» e non «grafico di $y = ax^2 + bx + c$ »

Nel capitolo delle equazioni di secondo grado la parabola compariva come il *disegno* che aiuta a leggere il segno di un trinomio. Andava benissimo lì, e non basta qui.

Definirla come luogo geometrico serve a due cose. La prima: si capisce *da dove vengono* il fuoco e la direttrice, che nell'altro capitolo non esistevano. La seconda: si scopre che anche $x = ay^2 + by + c$ è una parabola, pur non essendo il grafico di nessuna funzione $y = f(x)$.

3 L'equazione più semplice: $y = ax^2$

Mettiamo la parabola nella posizione più comoda: **vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y** . Allora il fuoco sta sull'asse y , diciamo $F(0; f)$ con $f \neq 0$, e la direttrice è la retta orizzontale $y = -f$ (deve stare dall'altra parte del vertice, alla stessa distanza).

Formula 3.1: Teorema: La parabola con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y ha equazione

$$y = ax^2, \quad \text{con } a = \frac{1}{4f} \neq 0.$$

Viceversa, $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ e la direttrice è $y = -\frac{1}{4a}$.

Dimostrazione. Sia $P(x; y)$ un punto qualsiasi del piano e H il piede della perpendicolare da P alla direttrice, cioè $H(x; -f)$. La condizione della definizione è $\overline{PF} = \overline{PH}$:

$$\sqrt{x^2 + (y - f)^2} = \sqrt{(y + f)^2} = |y + f|.$$

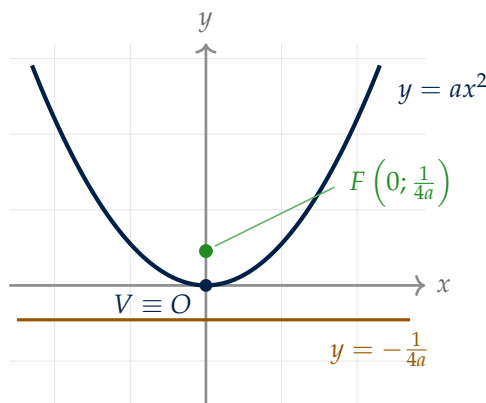
Qui c'è il passaggio delicato, ed è il motivo per cui il valore assoluto sta nei prerequisiti. Eleviamo al quadrato i due membri: è lecito perché sono **entrambi non negativi**, e per $A, B \geq 0$ vale $A = B \iff A^2 = B^2$. Inoltre $|y + f|^2 = (y + f)^2$.

$$x^2 + (y - f)^2 = (y + f)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2fy + f^2 = y^2 + 2fy + f^2$$

$$x^2 = 4fy \implies y = \frac{1}{4f} x^2.$$

Posto $a = \frac{1}{4f}$ si ottiene $y = ax^2$. Poiché $f \neq 0$, anche a è definito e diverso da zero; e invertendo, $f = \frac{1}{4a}$, da cui le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice. ■



Esempio Svolto 3.1: Dalla definizione all'equazione, con i numeri: Scriviamo l'equazione della parabola di fuoco $F(0;1)$ e direttrice $y = -1$.

Il vertice sta a metà fra fuoco e direttrice, sull'asse: è l'origine. Quindi siamo nel caso del teorema, con $f = 1$:

$$a = \frac{1}{4f} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{4}.$$

Controllo con la definizione. Prendiamo il punto della curva con $x = 4$: viene $y = 4$, cioè $P(4;4)$.

$$\overline{PF} = \sqrt{16 + 9} = 5, \quad \overline{PH} = |4 - (-1)| = 5.$$

Uguali: P sta davvero sulla parabola.

Esempio Svolto 3.2: E al contrario: Determiniamo fuoco e direttrice della parabola $y = 2x^2$.

Qui $a = 2$, quindi

$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad F\left(0; \frac{1}{8}\right), \quad d: y = -\frac{1}{8}.$$

Nota che il fuoco è *vicinissimo* al vertice. Non è un caso, ed è l'argomento del prossimo paragrafo.

4 Concavità e apertura

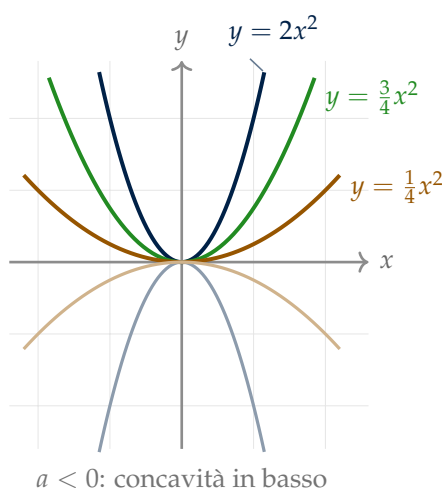
Il coefficiente a dice due cose diverse, e vanno tenute separate.

Formula 4.1: Il segno e il valore di a :

- il **segno** di a dà la **concavità**: $a > 0$ verso l'alto, $a < 0$ verso il basso;
- il **valore assoluto** di a dà l'**apertura**: al crescere di $|a|$ la parabola si **stringe**.

Perché il segno dà la concavità. In $y = ax^2$ il fattore x^2 è sempre ≥ 0 . Se $a > 0$ allora $y \geq 0$: tutti i punti stanno nel semipiano delle ordinate positive, e la curva «si apre verso l'alto». Se $a < 0$ allora $y \leq 0$ e succede il contrario. In tutti e due i casi il vertice è il punto più basso (o più alto) della curva. ■

Perché $|a|$ grande stringe. Vale $f = \frac{1}{4a}$: al crescere di $|a|$ la distanza $|f|$ fra fuoco e vertice *diminuisce*. Ma l'apertura della parabola è governata proprio da quanto sono lontani il fuoco e la direttrice: se si avvicinano, la curva si chiude attorno all'asse. ■



Esempio Svolto 4.1: Ordinare tre parabole senza disegnarle: Quale fra $y = -3x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = -\frac{1}{5}x^2$ è la più stretta? E quale guarda in su?

Concavità — si guarda il *segno*: solo $y = \frac{1}{2}x^2$ ha $a > 0$, quindi è l'unica con la concavità verso l'alto. Le altre due guardano in giù.

Apertura — si guarda il *valore assoluto*:

$$|-3| = 3, \quad \left|\frac{1}{2}\right| = 0,5, \quad \left|-\frac{1}{5}\right| = 0,2.$$

La più stretta è $y = -3x^2$ (il modulo più grande), la più larga è $y = -\frac{1}{5}x^2$.

Controllo in $x = 1$: vengono -3 , $0,5$ e $-0,2$. In un passo orizzontale la prima si è già allontanata di 3 dall'asse, l'ultima di 0,2: la prima è la più ripida, cioè la più stretta.

Nota che le due domande sono **indipendenti**: $y = -3x^2$ è la più stretta e guarda in giù, ma le due cose le dicono due proprietà diverse dello stesso numero.

«Coefficiente più grande, parabola più larga»

È il contrario, e lo sbaglia quasi tutta la classe. Confrontiamo in $x = 1$:

$$y = \frac{1}{4}x^2 \rightarrow y = \frac{1}{4}; \quad y = 2x^2 \rightarrow y = 2.$$

Con lo stesso passo in orizzontale, la seconda è già salita otto volte tanto: sale più ripida, quindi è più **stretta**.

Il modo di non sbagliare è non ricordarselo: si sostituisce $x = 1$ e si guarda chi è più in alto. Chi sale prima è più stretta.

5 Traslare la parabola: $y = ax^2 + bx + c$

Adesso spostiamo il vertice. Sia γ la parabola $y = ax^2$, con vertice in O , e sia γ' la sua traslata di vettore $\vec{v}(x_V; y_V)$, che porta O nel punto $V(x_V; y_V)$.

Formula 5.1: Teorema: La parabola con vertice $V(x_V; y_V)$ e asse parallelo all'asse y ha equazione

$$y - y_V = a(x - x_V)^2,$$

che sviluppata diventa

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Viceversa, ogni equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse y .

Dimostrazione. Le equazioni della traslazione sono

$$\begin{cases} x' = x + x_V \\ y' = y + y_V \end{cases} \implies \begin{cases} x = x' - x_V \\ y = y' - y_V. \end{cases}$$

Un punto $(x'; y')$ sta su γ' se e solo se il suo corrispondente $(x; y)$ sta su γ , cioè se $y = ax^2$. Sostituendo:

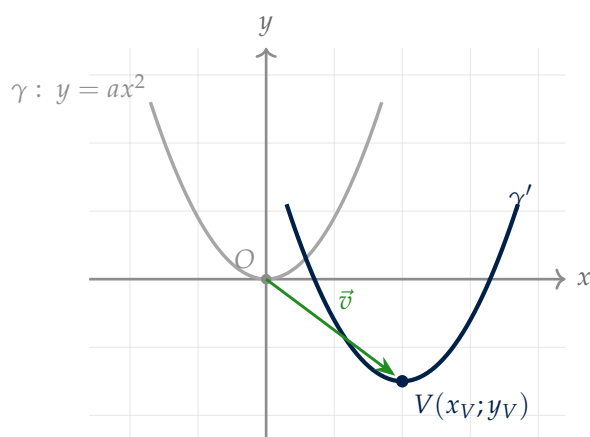
$$y' - y_V = a(x' - x_V)^2.$$

Gli apici servivano solo a distinguere i punti delle due curve: possiamo toglierli e scrivere $y - y_V = a(x - x_V)^2$.

Sviluppando il quadrato:

$$y = ax^2 - 2ax_V x + ax_V^2 + y_V,$$

e ponendo $b = -2ax_V$ e $c = ax_V^2 + y_V$ si ottiene $y = ax^2 + bx + c$. ■



Esempio Svolto 5.1: Dal vertice all'equazione, e ritorno: Scriviamo la parabola con vertice $V(2; -1)$ passante per $A(0;7)$.

Partiamo dalla forma con il vertice, dove x_V e y_V si leggono dentro:

$$y - (-1) = a(x - 2)^2 \quad \Rightarrow \quad y + 1 = a(x - 2)^2.$$

Manca solo a , e lo dà il passaggio per $A(0;7)$:

$$7 + 1 = a(0 - 2)^2 \quad \Rightarrow \quad 8 = 4a \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Quindi $y + 1 = 2(x - 2)^2$, e sviluppando:

$$y = 2(x^2 - 4x + 4) - 1 = 2x^2 - 8x + 7.$$

Controllo all'indietro. Con $a = 2$, $b = -8$, $c = 7$ la dimostrazione dice $b = -2ax_V$, cioè $-8 = -2 \cdot 2 \cdot x_V$, da cui $x_V = 2$: torna. E per $x = 0$ viene $y = 7$: passa per A .

La forma $y - y_V = a(x - x_V)^2$ conviene ogni volta che il vertice è **dato**: evita di scrivere un sistema in tre incognite.

6 Vertice, asse, fuoco, direttrice

Dalla dimostrazione precedente abbiamo $b = -2ax_V$ e $c = ax_V^2 + y_V$: da queste due relazioni si ricavano le formule che si usano tutti i giorni.

Ascissa del vertice. Da $b = -2ax_V$ segue subito

$$x_V = -\frac{b}{2a}.$$

Ordinata del vertice. Da $c = ax_V^2 + y_V$ segue $y_V = c - ax_V^2$, e sostituendo x_V :

$$y_V = c - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Formula 6.1: Le quattro formule: Per la parabola $y = ax^2 + bx + c$, con $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\begin{aligned}\text{asse:} & \quad x = -\frac{b}{2a} \\ \text{vertice:} & \quad V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \\ \text{fuoco:} & \quad F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right) \\ \text{direttrice:} & \quad y = -\frac{1+\Delta}{4a}\end{aligned}$$

Da dove vengono fuoco e direttrice. Il fuoco sta sull'asse, quindi ha la stessa ascissa del vertice: $x_F = -\frac{b}{2a}$. Quanto all'ordinata, la traslazione ha alzato di y_V il fuoco della parabola $y = ax^2$, che stava a $\frac{1}{4a}$:

$$y_F = \frac{1}{4a} + y_V = \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a} = \frac{1-\Delta}{4a}.$$

Analogamente la direttrice, che per $y = ax^2$ era $y = -\frac{1}{4a}$, si alza di y_V :

$$y = -\frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{1+\Delta}{4a}. \quad \blacksquare$$

Metodo 6.1: Un'alternativa per l'ordinata del vertice: La formula $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ non è obbligatoria. Trovata l'ascissa, si può **sostituirla nell'equazione**: è lo stesso conto, e spesso è più corto.

Convieni la formula quando Δ serve comunque (per esempio perché stiamo già cercando le intersezioni con l'asse x); conviene la sostituzione negli altri casi.

Esempio Svolto 6.1: $y = 3x^2 - 6x + 1$: Qui $a = 3$, $b = -6$, $c = 1$, quindi $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 36 - 12 = 24$.

Vertice:

$$x_V = -\frac{-6}{2 \cdot 3} = 1, \quad y_V = -\frac{24}{4 \cdot 3} = -2 \quad \implies \quad V(1; -2).$$

Controllo con la sostituzione: $y_V = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -2$. Torna.

Asse: $x = 1$.

Fuoco: $x_F = 1$ e $y_F = \frac{1-24}{12} = -\frac{23}{12}$, quindi $F\left(1; -\frac{23}{12}\right)$.

Direttrice: $y = -\frac{1+24}{12} = -\frac{25}{12}$.

Nota che il fuoco sta *sopra* il vertice ($-\frac{23}{12} > -2$) e la direttrice *sotto*: giusto, perché $a > 0$ e la concavità è verso l'alto.

Due Δ diversi nello stesso esercizio

In questo capitolo la lettera Δ compare in due ruoli, e non sono lo stesso numero.

Il Δ della parabola è $b^2 - 4ac$: serve per il vertice, e dice quante volte la curva taglia l'asse x .

Il Δ dell'equazione risolvente (paragrafo 11) nasce quando si mette a sistema la parabola con una retta: dice se la retta è secante, tangente o esterna.

In un esercizio con una retta tangente ci sono tutti e due, e vanno scritti in due righe diverse.

7 Dall'equazione al grafico

Metodo 7.1: I cinque passi per disegnare $y = ax^2 + bx + c$:

1. **Concavità:** guarda il segno di a .
2. **Vertice:** $x_V = -\frac{b}{2a}$, poi sostituisci.
3. **Intersezione con l'asse y :** poni $x = 0$, viene $(0; c)$. Gratis.
4. **Intersezioni con l'asse x :** risolvi $ax^2 + bx + c = 0$.
5. **Un paio di punti in più,** presi simmetrici rispetto all'asse: costano una sostituzione e raddoppiano.

Esempio Svolto 7.1: Disegniamo $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$: 1. **Concavità.** $a = \frac{1}{4} > 0$: verso l'alto.

2. **Vertice.**

$$x_V = -\frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2, \quad y_V = \frac{1}{4} \cdot 4 - 2 - 3 = -4 \quad \Rightarrow \quad V(2; -4).$$

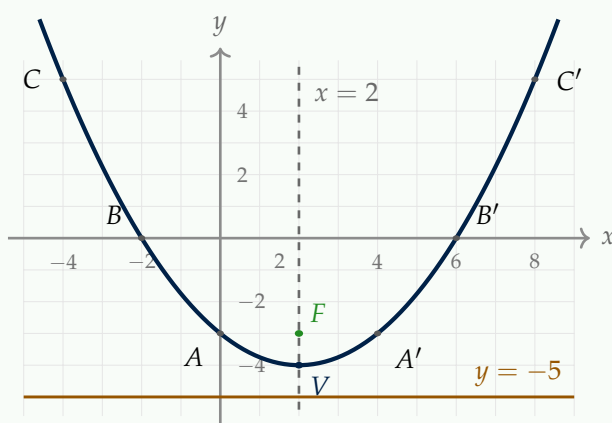
3. **Asse y .** $x = 0$ dà $y = -3$: il punto $A(0; -3)$.

4. **Asse x .** $\frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0$, cioè $x^2 - 4x - 12 = 0$, da cui $x_1 = -2$ e $x_2 = 6$: i punti $B(-2; 0)$ e $B'(6; 0)$.

5. **Due punti in più.** L'asse è $x = 2$; il simmetrico di $A(0; -3)$ è $A'(4; -3)$. E per $x = -4$ viene $y = 5$, quindi $C(-4; 5)$ e il suo simmetrico $C'(8; 5)$.

Fuoco e direttrice. $\Delta = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-3) = 4$, quindi

$$y_F = \frac{1 - 4}{4 \cdot \frac{1}{4}} = -3 \Rightarrow F(2; -3), \quad d: y = -\frac{1 + 4}{1} = -5.$$

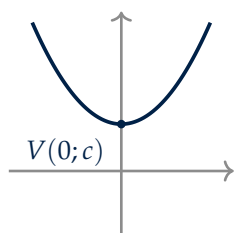


8 I casi particolari

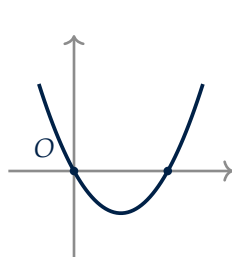
In $y = ax^2 + bx + c$ il coefficiente a non è mai nullo, ma b e c sì. Ogni volta che succede la parabola si semplifica, e conviene riconoscerlo a vista invece di rifare i conti.

Formula 8.1: Che cosa manca, e che cosa vuol dire:

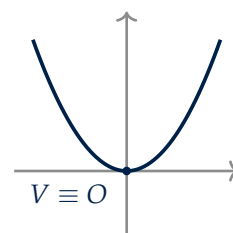
Caso	Equazione	Che cosa succede
$b = 0, c \neq 0$	$y = ax^2 + c$	vertice $V(0; c)$, asse $x = 0$ (l'asse y)
$b \neq 0, c = 0$	$y = ax^2 + bx$	passa per l'origine
$b = 0, c = 0$	$y = ax^2$	vertice nell'origine, asse $x = 0$



$$y = ax^2 + c$$



$$y = ax^2 + bx$$



$$y = ax^2$$

Esempio Svolto 8.1: Riconoscere senza calcolare: $y = -2x^2 + 5$: manca la x , quindi il vertice è sull'asse y , in $V(0; 5)$; e $a < 0$, quindi concavità verso il basso. Il grafico si disegna in dieci secondi.

$y = x^2 - 4x$: manca il termine noto, quindi passa per l'origine. Le intersezioni con l'asse x si trovano raccogliendo: $x(x - 4) = 0$ dà $x = 0$ e $x = 4$. L'asse è a metà, $x = 2$.

In tutti e due i casi le formule generali darebbero la stessa risposta, ma con più conti e più occasioni di sbagliare.

9 Intersezioni con l'asse x , e il Δ

Le intersezioni con l'asse x si trovano ponendo $y = 0$, cioè risolvendo $ax^2 + bx + c = 0$. Il numero di soluzioni è dato dal discriminante, e questo lega il Δ a una proprietà **geometrica**.

Formula 9.1: Il Δ conta le intersezioni:

- $\Delta > 0$: **due** intersezioni;
- $\Delta = 0$: **una**, e coincide con il vertice (la parabola è tangente all'asse x);
- $\Delta < 0$: **nessuna**.

Perché con $\Delta = 0$ l'intersezione è proprio il vertice

Se $\Delta = 0$ allora $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 0$: il vertice sta sull'asse x . E siccome il vertice è il punto più basso (o più alto) della curva, la parabola tocca l'asse lì e non lo attraversa.

Esempio Svolto 9.1: Tre parabole, tre Δ : $y = x^2 - 4x + 3$: $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$, e infatti $x^2 - 4x + 3 = 0$ dà $x = 1$ e $x = 3$. Due intersezioni.

$y = x^2 - 4x + 4$: $\Delta = 16 - 16 = 0$. Una sola: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$ dà $x = 2$, che è anche $x_V = \frac{4}{2} = 2$. Tangente all'asse x .

$y = x^2 - 4x + 7$: $\Delta = 16 - 28 = -12 < 0$. Nessuna: la parabola sta tutta sopra l'asse x (il vertice è in $y_V = \frac{12}{4} = 3 > 0$ e la concavità è verso l'alto).

10 La parabola come funzione: massimi e minimi

L'equazione $y = ax^2 + bx + c$ fa corrispondere a ogni x **uno e un solo** valore di y : è dunque una funzione, che si chiama **funzione quadratica**. Ogni parabola con asse parallelo all'asse y è il grafico di una funzione.

Formula 10.1: Il vertice è il massimo o il minimo:

- se $a > 0$ la funzione ha **minimo** in x_V , e vale y_V ;
- se $a < 0$ ha **massimo** in x_V , e vale y_V .

In tutti e due i casi il valore ottimo è $-\frac{\Delta}{4a}$, e si raggiunge in $x = -\frac{b}{2a}$.

Dimostrazione. Scriviamo la parabola nella forma con il vertice: $y = a(x - x_V)^2 + y_V$. Il quadrato $(x - x_V)^2$ è sempre ≥ 0 e vale zero solo per $x = x_V$. Se $a > 0$ allora $a(x - x_V)^2 \geq 0$, quindi $y \geq y_V$ per ogni x : il minimo è y_V e si ha solo nel vertice. Se $a < 0$ il prodotto è ≤ 0 e $y \leq y_V$: massimo. ■

Esempio Svolto 10.1: Un problema di minimo: Il laboratorio di una farmacia produce lozioni. Se x è il numero di flaconi prodotti ogni giorno, il costo y di un singolo flacone, in euro, è

$$y = \frac{1}{10}x^2 - 6x + 100, \quad 0 \leq x \leq 50.$$

Quanti flaconi conviene produrre?

La funzione è quadratica con $a = \frac{1}{10} > 0$: ha un *minimo*, e sta nel vertice.

$$x_V = -\frac{-6}{2 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{6}{\frac{1}{5}} = 30.$$

Il valore 30 sta dentro l'intervallo ammesso $[0; 50]$, quindi va bene. Il costo minimo è

$$y_V = \frac{1}{10} \cdot 900 - 180 + 100 = 90 - 180 + 100 = 10.$$

Risposta: 30 flaconi al giorno, a 10 euro l'uno.

Il vertice fuori dall'intervallo

Nei problemi la x ha quasi sempre dei vincoli (un numero di pezzi non è negativo, una lunghezza non supera il perimetro). Se il vertice **cade fuori** dall'intervallo ammesso, il massimo o il minimo *non* è nel vertice: sta in uno degli estremi.

Nell'esempio sopra $x_V = 30$ stava dentro $[0; 50]$ e non c'era problema. Se il vincolo fosse stato $0 \leq x \leq 20$, il costo minimo si sarebbe avuto in $x = 20$, perché su quell'intervallo la funzione è tutta decrescente.

Quindi: si trova il vertice, e **poi si controlla che sia ammissibile**. È lo stesso controllo delle soluzioni non accettabili nelle equazioni fratte.

11 Parabola con asse parallelo all'asse x

Fin qui l'asse era verticale. Se invece è **orizzontale**, la curva è ancora una parabola — la definizione non parla di assi cartesiani — ma l'equazione cambia ruolo alle variabili.

Formula 11.1: Teorema: La parabola con asse parallelo all'asse x ha equazione

$$x = ay^2 + by + c, \quad a \neq 0,$$

e le sue formule si ottengono da quelle note **scambiando x con y** :

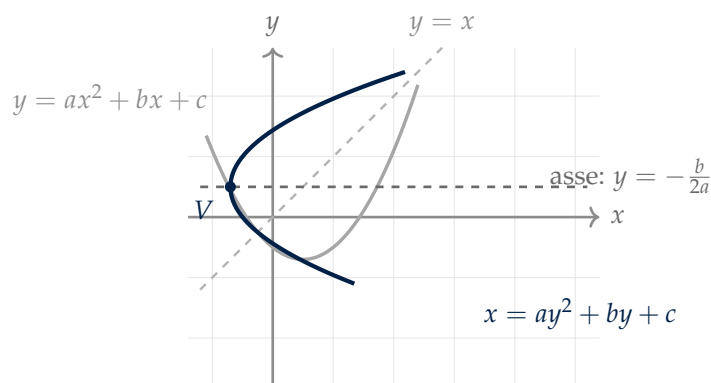
$$\text{asse: } y = -\frac{b}{2a}, \quad V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right), \quad F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right), \quad d: x = -\frac{1+\Delta}{4a}.$$

Dimostrazione. La simmetria assiale rispetto alla bisettrice $y = x$ ha equazioni $x' = y, y' = x$: scambia le due coordinate. Essendo una isometria, manda parabole in parabole, e manda una retta verticale in una orizzontale — quindi manda una parabola con asse verticale in una con asse orizzontale.

Applicandola a $y = ax^2 + bx + c$ si scambia ovunque x con y :

$$x = ay^2 + by + c.$$

E le formule del vertice, del fuoco e della direttrice si trasformano allo stesso modo, scambiando le due coordinate in ogni punto e scambiando « x » con « y » in ogni retta. ■



$x = ay^2 + by + c$ non è una funzione

A una stessa x corrispondono **due** valori di y , quindi la curva non è il grafico di nessuna funzione $y = f(x)$: basta il criterio della retta verticale, che la taglia in due punti.

Lo diventa un *ramo* solo. Da $x = y^2$ si ricava $y = \pm\sqrt{x}$, e

$$y = \sqrt{x}$$

è una funzione, con dominio $x \geq 0$ e immagine $y \geq 0$: il ramo che sta nel primo quadrante. L'altro ramo è $y = -\sqrt{x}$.

Attenzione anche alle formule: qui $x_V = -\frac{\Delta}{4a}$ e $y_V = -\frac{b}{2a}$, cioè **scambiate** rispetto al caso solito. Usare $-\frac{b}{2a}$ come ascissa è l'errore tipico di questa sezione.

Esempio Svolto 11.1: $x = y^2 - 6y + 10$: Qui $a = 1, b = -6, c = 10$ e $\Delta = 36 - 40 = -4$.

Asse: $y = -\frac{-6}{2} = 3$, una retta *orizzontale*.

Vertice: $x_V = -\frac{-4}{4} = 1$, quindi $V(1; 3)$.

Controllo: sostituendo $y = 3$ nell'equazione viene $x = 9 - 18 + 10 = 1$. Torna.

Concavità: $a > 0$, quindi la curva si apre verso le x positive (verso destra).

Fuoco: $x_F = \frac{1-(-4)}{4} = \frac{5}{4}$, quindi $F(\frac{5}{4}; 3)$. **Direttrice:** $x = -\frac{1-4}{4} = \frac{3}{4}$.

12 Rette e parabole

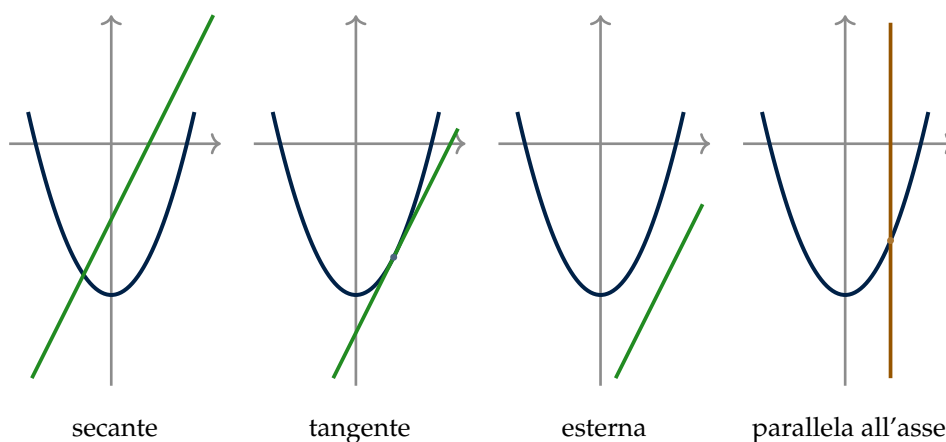
Mettere a sistema una retta e una parabola è un sistema non lineare, e si risolve per sostituzione. Quello che conta è **quante** soluzioni ha.

Formula 12.1: L'equazione risolvente: Data la parabola $y = ax^2 + bx + c$ e la retta $y = mx + q$ (non parallela all'asse), il sistema porta a

$$ax^2 + bx + c = mx + q \quad \implies \quad ax^2 + (b - m)x + (c - q) = 0,$$

che si chiama **equazione risolvente**. Detto Δ il suo discriminante:

- $\Delta > 0$: la retta è **secante** (due punti);
- $\Delta = 0$: la retta è **tangente** (un punto);
- $\Delta < 0$: la retta è **esterna** (nessun punto).



Il quarto caso: la retta parallela all'asse

Una retta **verticale** $x = k$ non si può scrivere come $y = mx + q$: non ha coefficiente angolare. Quindi non entra nell'equazione risolvente e il criterio del Δ non la riguarda.

Che cosa fa, allora? Sostituendo $x = k$ nella parabola si ottiene un *unico* valore di y : la retta interseca la parabola in **un solo punto**, e non è tangente. È il quarto disegno qui sopra.

Morale: «un solo punto di intersezione» **non** vuol dire «tangente».

Esempio Svolto 12.1: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ e $y = x - 4$: Mettiamo a sistema:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x = x - 4.$$

Moltiplichiamo per -2 e portiamo tutto a primo membro:

$$x^2 - 4x = -2x + 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 8 = 0.$$

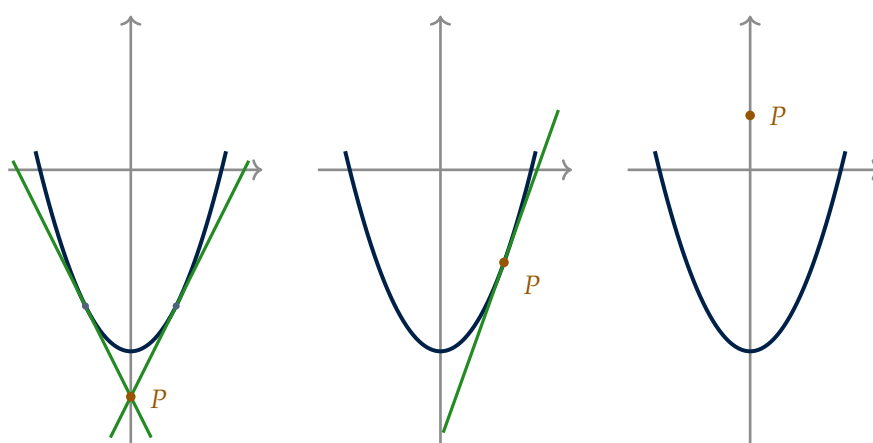
$\Delta = 4 + 32 = 36 > 0$: la retta è **secante**. Le soluzioni sono $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$, e sostituendo nella retta ($y = x - 4$) si ottengono le ordinate:

$$A(-2; -6), \quad B(4; 0).$$

Controllo: sostituiamo A nella *parabola*, non nella retta: $-\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot (-2) = -2 - 4 = -6$. Torna.

13 Rette tangenti

Le rette tangenti a una parabola passanti per un punto P possono essere due, una o nessuna, a seconda di dove sta P .



P esterno: **due**

P sulla curva: **una**

P interno: **nessuna**

Metodo 13.1: Le tangenti da un punto $P(x_0; y_0)$:

1. scrivi il **fascio** delle rette per P : $y = m(x - x_0) + y_0$;
2. mettilo a sistema con la parabola e ricava l'equazione risolvente;
3. imponi la **condizione di tangenza** $\Delta = 0$: è un'equazione in m ;
4. sostituisci i valori di m trovati nel fascio.

Se l'equazione in m ha due soluzioni, P è esterno; una sola, P sta sulla parabola; nessuna, P è interno.

Esempio Svolto 13.1: Tangenti a $y = x^2 - 2$ da $P(1; -5)$: 1. Fascio per P : $y + 5 = m(x - 1)$.

2. Sistema: sostituendo $y = m(x - 1) - 5$ nella parabola,

$$m(x - 1) - 5 = x^2 - 2 \quad \implies \quad x^2 - mx + m + 3 = 0.$$

3. Tangenza:

$$\Delta = m^2 - 4(m + 3) = m^2 - 4m - 12 = 0 \quad \implies \quad m_1 = -2, \quad m_2 = 6.$$

4. Le due tangenti:

$$t_1 : y = -2x - 3, \quad t_2 : y = 6x - 11.$$

Due soluzioni, quindi P è **esterno** alla parabola — e in effetti $P(1; -5)$ sta sotto il vertice $V(0; -2)$.

Se il punto sta sulla parabola: due scorciatoie

Formula 13.1: Teorema: il coefficiente angolare della tangente: Se $P(x_0; y_0)$ appartiene alla parabola $y = ax^2 + bx + c$, la tangente in P ha coefficiente angolare

$$m = 2ax_0 + b,$$

e quindi equazione $y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0)$.

Dimostrazione. L'equazione risolvente fra la parabola e una retta del fascio per P è

$$ax^2 + (b - m)x + (c + mx_0 - y_0) = 0.$$

Se la retta è tangente in P , le due soluzioni devono essere **coincidenti** e valere entrambe x_0 : la loro somma è dunque $2x_0$. Ma in un'equazione di secondo grado la somma delle radici vale $-\frac{\text{coefficiente di } x}{\text{coefficiente di } x^2}$, quindi

$$-\frac{b - m}{a} = 2x_0 \quad \implies \quad m - b = 2ax_0 \quad \implies \quad m = 2ax_0 + b. \quad \blacksquare$$

Formula 13.2: Formula di sdoppiamento: Se $P(x_0; y_0)$ appartiene alla parabola $y = ax^2 + bx + c$, l'equazione della tangente in P si scrive direttamente:

$$\frac{y + y_0}{2} = a x x_0 + b \frac{x + x_0}{2} + c.$$

Si ottiene dall'equazione della parabola sostituendo $y \rightarrow \frac{y+y_0}{2}$, $x^2 \rightarrow x x_0$, $x \rightarrow \frac{x+x_0}{2}$.

Esempio Svolto 13.2: La stessa tangente, per tre strade: Scriviamo la tangente a $y = -2x^2 + 3x + 1$ nel suo punto $P(2; -1)$.

Verifica che P ci stia: $-2 \cdot 4 + 6 + 1 = -1$. Sì.

Con $m = 2ax_0 + b$: $m = 2(-2)(2) + 3 = -5$, quindi $y + 1 = -5(x - 2)$, cioè $y = -5x + 9$.

Con lo sdoppiamento:

$$\frac{y-1}{2} = -2 \cdot x \cdot 2 + 3 \cdot \frac{x+2}{2} + 1$$

$$y - 1 = -8x + 3(x + 2) + 2 = -5x + 8 \quad \implies \quad y = -5x + 9.$$

Con il fascio e $\Delta = 0$: funziona anche quella, ma sono quattro passaggi invece di uno. Si usa quando P **non** sta sulla parabola — ed è l'unico caso in cui serve davvero.

Quando $\Delta = 0$ non trova la tangente

Se la parabola ha asse parallelo all'asse x , una delle tangenti da un punto può essere **parallela all'asse y** , cioè del tipo $x = k$.

Quella retta non ha coefficiente angolare, non sta nel fascio $y - y_0 = m(x - x_0)$ e la condizione $\Delta = 0$ non la troverà mai: si otterrà una sola soluzione in m dove le tangenti sono due.

Il rimedio è ricordarsene e cercarla a parte, imponendo che $x = k$ incontri la curva in un punto solo.

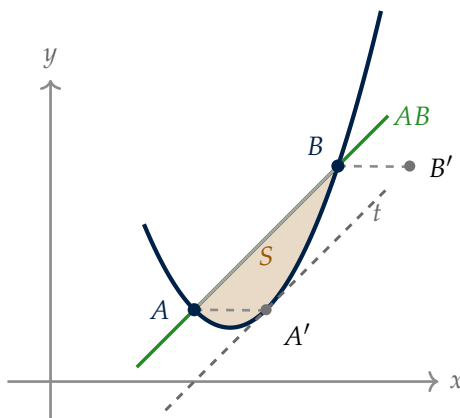
14 Area del segmento parabolico

Se una retta è secante una parabola nei punti A e B , la corda AB e l'arco di parabola che va da A a B delimitano una regione di piano che si chiama **segmento parabolico**.

Formula 14.1: Teorema di Archimede: Si traccia la retta parallela ad AB e tangente alla parabola, e si proiettano A e B su di essa in A' e B' . Allora

$$S = \frac{2}{3} \cdot \mathcal{A}_{AA'B'B}.$$

L'area del segmento parabolico è due terzi di quella del rettangolo (o parallelogramma) $AA'B'B$.



Esempio Svolto 14.1: $y = x^2 - 5x + 7$ e la retta $y = x - 1$: **1. Intersezioni.** $x^2 - 5x + 7 = x - 1$ dà $x^2 - 6x + 8 = 0$, cioè $x = 2$ e $x = 4$: i punti $A(2; 1)$ e $B(4; 3)$.

2. La corda. $\overline{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

3. La tangente parallela ad AB. La corda ha $m = 1$; con $m = 2ax_0 + b$ imponiamo $2x_0 - 5 = 1$, cioè $x_0 = 3$. Il punto di tangenza è $T(3; 1)$ e la tangente è $y = x - 2$.

4. L'altezza del rettangolo è la distanza fra le due rette parallele, cioè la distanza di $A(2; 1)$ da $x - y - 2 = 0$:

$$\overline{AA'} = \frac{|2 - 1 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. Area del rettangolo e del segmento.

$$\mathcal{A}_{AA'B'B} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2, \quad S = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

15 Determinare l'equazione di una parabola

Nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ ci sono **tre** coefficienti: per trovarli servono **tre condizioni indipendenti**, che diventano tre equazioni in a, b, c .

Formula 15.1: Quanto vale ogni dato:

Dato	Quante condizioni
passaggio per un punto	una
il vertice	due (ascissa e ordinata)
il fuoco	due
l'asse, oppure la direttrice	una
tangenza a una retta data	una ($\Delta = 0$)

Contare male le condizioni

«Passa per A e ha fuoco in F » sono **tre** condizioni, non due: il fuoco ne vale due da solo, perché fissa sia l'ascissa ($x_F = -\frac{b}{2a}$) sia l'ordinata ($y_F = \frac{1-\Delta}{4a}$).

«Passa per A e per B » sono due, e non bastano: le parabole per due punti sono infinite (è il fascio del paragrafo 15).

Esempio Svolto 15.1: Parabola per $P(-1;2)$ con fuoco $F(-2; \frac{5}{4})$: Tre condizioni, tre equazioni.

$$\begin{cases} 2 = a - b + c & \text{passaggio per } P(-1;2) \\ -\frac{b}{2a} = -2 & x_F = -2 \\ \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{5}{4} & y_F = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Dalla seconda: $b = 4a$. Sostituendo nella terza, con $\Delta = b^2 - 4ac = 16a^2 - 4ac$:

$$\frac{1 - 16a^2 + 4ac}{4a} = \frac{5}{4}.$$

Mettendo insieme con la prima si arriva a **due** soluzioni:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 5 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = -1 \\ c = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Le parabole sono **due**:

$$y = x^2 + 4x + 5, \quad y = -\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{5}{4}.$$

Perché due? Perché lo stesso fuoco va bene per una parabola con la concavità verso l'alto e per una verso il basso: il sistema contiene Δ , che è di secondo grado in a , e restituisce onestamente tutte e due. Vanno scritte tutte e due.

Controllo della prima: $a = 1, b = 4, c = 5$ dà $\Delta = 16 - 20 = -4$, quindi $x_F = -2$ e $y_F = \frac{1-4}{4} = \frac{5}{4}$. Torna. E $1 - 4 + 5 = 2$: passa per P .

16 Fasci di parabole

Formula 16.1: Definizione: Date due parabole $\gamma : y - ax^2 - bx - c = 0$ e $\gamma' : y - a'x^2 - b'x - c' = 0$, si chiama **fascio di parabole** generato da γ e γ' l'insieme delle curve di equazione

$$y - ax^2 - bx - c + k(y - a'x^2 - b'x - c') = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Le due parabole si dicono **generatrici**.

Metodo 16.1: Studiare un fascio:

1. **Generatrici:** si raccoglie il parametro k . Una generatrice si ottiene per $k = 0$, l'altra uguagliando a zero l'espressione moltiplicata per k .
2. **Punti base:** si mette a sistema le equazioni delle due generatrici. Sono i punti per cui passano *tutte* le curve del fascio.
3. **Parabole degeneri:** sono le rette del fascio, e si ottengono annullando il coefficiente di x^2 oppure quello di y .

I punti base possono non esistere

Due generatrici possono essere secanti (due punti base), tangenti (due coincidenti), incontrarsi in un punto solo, oppure **non incontrarsi affatto**. Nell'ultimo caso il fascio non ha punti base e le sue parabole non hanno nessun punto in comune.

È il motivo per cui il passo 2 del metodo può finire con «il sistema non ha soluzioni reali», e non è un errore.

Esempio Svolto 16.1: Il fascio $y = (k - 2)x^2 + (1 - k)x + k$: 1. Raccogliamo k .

$$k(x^2 - x + 1) + (-2x^2 + x - y) = 0.$$

Le generatrici sono dunque

$$\gamma : x^2 - x + 1 = 0, \quad \gamma' : y = -2x^2 + x.$$

2. **Punti base.** Mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ 2x^2 - x + y = 0 \end{cases}$$

La prima ha $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$: nessuna soluzione reale. Il fascio **non ha punti base**, e le sue parabole non si incontrano mai.

3. Parabole degeneri. Il coefficiente di x^2 è $k - 2$: si annulla per $k = 2$, e l'equazione diventa

$$y = (1 - 2)x + 2 = -x + 2,$$

una retta. È la parabola degenera del fascio.

Formula 16.2: Due fasci che si scrivono a memoria:

- **Parabole per due punti** $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, con $x_A \neq x_B$, detta $y = mx + q$ la retta AB :

$$y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B);$$

- **Parabole tangenti in** $T(x_T; y_T)$ **alla retta** $r : y = mx + q$:

$$y = mx + q + k(x - x_T)^2.$$

Perché funzionano. Nel primo caso, sostituendo $x = x_A$ il termine con k si annulla e resta $y = mx_A + q = y_A$: la curva passa per A qualunque sia k . Idem per B . Nel secondo, la differenza fra la parabola e la retta è $k(x - x_T)^2$, che si annulla *due volte* in x_T : le due intersezioni sono coincidenti, cioè la retta è tangente in T . ■

17 La proprietà ottica

È la ragione per cui le antenne paraboliche e i fari hanno quella forma, e si dimostra senza derivate.

Formula 17.1: Teorema: Un raggio che arriva **parallelo all'asse** e si riflette sulla parabola passa per il **fuoco**.

Dimostrazione. Sia P un punto della parabola, H il suo piede sulla direttrice, F il fuoco, e sia t l'asse del segmento FH (la perpendicolare a FH nel suo punto medio).

Primo: t **passa per** P . Per definizione di parabola $\overline{PF} = \overline{PH}$, quindi P è equidistante da F e da H : sta sull'asse di quel segmento.

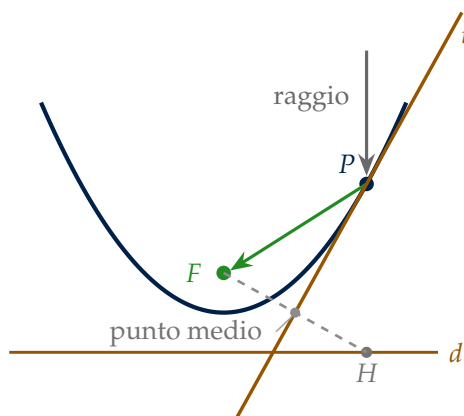
Secondo: t **è tangente alla parabola in** P . Prendiamo un punto Q di t diverso da P , e sia K il suo piede sulla direttrice. Poiché Q sta sull'asse di FH , vale $\overline{QF} = \overline{QH}$. Ma QH è obliquo e QK perpendicolare alla direttrice, quindi $\overline{QH} > \overline{QK}$. Allora

$$\overline{QF} = \overline{QH} > \overline{QK},$$

cioè Q dista dal fuoco *più* che dalla direttrice: Q non sta sulla parabola. Dunque t tocca la curva solo in P : è la tangente.

Terzo: la riflessione. La retta t è l'asse di FH , quindi forma angoli uguali con PF e con PH . Ma PH è perpendicolare alla direttrice, cioè **parallela all'asse** della parabola.

Un raggio che arriva parallelo all'asse viaggia lungo la direzione HP ; riflettendosi su t con angoli uguali, prosegue lungo PF — e passa per il fuoco. ■



Esempio Svolto 17.1: Dove si mette il ricevitore: L'antenna di un radiotelescopio ha una sezione parabolica di diametro 76,2 m, e il ricevitore si trova a 22,9 m sulla verticale passante per il vertice. Qual è l'equazione della parabola, e quanto è alta l'antenna ai bordi?

Mettiamo il vertice nell'origine e l'asse lungo l'asse y : siamo nel caso $y = ax^2$. Il ricevitore sta **nel fuoco** — è tutto il senso della proprietà ottica — quindi $F(0; 22,9)$ e

$$\frac{1}{4a} = 22,9 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{91,6}.$$

L'equazione è $y = \frac{x^2}{91,6}$.

L'altezza al bordo è l'ordinata dei punti di ascissa uguale a metà diametro, cioè $x = 38,1$:

$$y = \frac{38,1^2}{91,6} = \frac{1451,61}{91,6} \approx \mathbf{15,8 \text{ m.}}$$

Nota che il fuoco (22,9 m) sta *più in alto* del bordo (15,8 m): il ricevitore sporge fuori dalla conca, ed è per questo che nelle foto delle antenne lo si vede sospeso su un traliccio.

A che cosa serve

In un'antenna parabolica il ricevitore si mette **nel fuoco**: le onde che arrivano parallele all'asse — e da una sorgente lontanissima arrivano praticamente parallele — vengono concentrate tutte lì. Basta un solo ricevitore per raccogliere tutto quello che colpisce l'antenna.

Un faro fa la stessa cosa al contrario: la lampadina sta nel fuoco, e i raggi escono paralleli.

18 Quale strada, e quando

Formula 18.1: La mappa del capitolo:

Se il testo dà...	allora...
fuoco e direttrice	torna alla definizione : $\overline{PF} = \overline{PH}$
l'equazione $y = ax^2 + bx + c$	le quattro formule del paragrafo 6
un'equazione con x e y scambiate	scambia anche le formule (par. 10)
una retta e chiede la posizione	equazione risolvente e il suo Δ
un punto <i>sulla</i> parabola	$m = 2ax_0 + b$, oppure lo sdoppiamento
un punto <i>fuori</i> dalla parabola	fascio per P e $\Delta = 0$
tre informazioni sulla curva	sistema di tre equazioni in a, b, c
un parametro k nell'equazione	è un fascio : generatrici, punti base, degeneri

Esempio Svolto 18.1: Quale strada, senza risolvere: «Scrivi la parabola di fuoco $F(0;3)$ e direttrice $y = -3$.» Vertice a metà, nell'origine: caso $y = ax^2$ con $f = 3$, cioè $a = \frac{1}{12}$.

«**Determina vertice e fuoco di $y = 2x^2 - 8x + 5$.**» Quattro formule, nient'altro.

«**La retta $y = 2x + 1$ è tangente a $y = x^2$?**» Equazione risolvente e Δ : $x^2 - 2x - 1 = 0$ ha $\Delta = 8 > 0$, quindi è secante. No.

«**Tangente a $y = x^2 - 3x$ nel suo punto di ascissa 2.**» Il punto ci sta ($y = -2$): si usa $m = 2ax_0 + b = 4 - 3 = 1$. Nessun fascio.

«**Parabola per $A(1;0)$, $B(3;0)$ e $C(0;3)$.**» Tre punti, tre condizioni: sistema in a, b, c .

Chi sceglie bene la prima mossa fa metà del lavoro; chi la sceglie male fa venti righe di conti giusti per arrivare dove si arrivava in tre.

Dove si va da qui

La parabola è la prima delle **coniche**, e le altre si studiano con lo stesso schema: definizione come luogo, equazione ricavata dalla definizione, posizione di una retta con il Δ dell'equazione risolvente, tangenti con lo sdoppiamento.

Nella **circonferenza** il luogo è «punti a distanza fissa da un centro»; nell'**ellisse** e nell'**iperbole** entrano in gioco due fuochi, con la somma o la differenza delle distanze.

E in **analisi**, al triennio, il coefficiente angolare della tangente $m = 2ax_0 + b$ si ritroverà come *derivata* di $ax^2 + bx + c$: è la stessa cosa, dimostrata in un altro modo.

Indice analitico

apertura, 6
Archimede, 19
asse parallelo all'asse x , 14

casi particolari, 12
concavità, 6
condizioni, 20

direttrice, 9

equazione della parabola, 5
equazione risolvente, 16

fascio di parabole, 22
funzione quadratica, 13
fuoco, 9

grafico, 11

intersezioni, 13

luogo geometrico, 3

massimo, 13
minimo, 13

parabola, 3
proprietà ottica, 23
punti base, 22

retta e parabola, 16
riflessione, 23

sdoppiamento, 17
segmento parabolico, 19

tangente, 17
traslazione, 8

vertice, 9