

GEOMETRIA PIANA

GEOMETRIA

Perimetri, aree e formule inverse:
il ripasso che serve alle superiori

Prof. A. Perna

IllogicoMatematico

Indice

1	Cosa serve prima di partire	3
2	Perimetro e area	3
3	I triangoli	4
4	I quadrilateri	5
5	Le formule inverse	7
6	Il teorema di Pitagora	8
7	Pitagora dentro le altre figure	9
8	I teoremi di Euclide	10
9	I poligoni regolari	10
10	Il cerchio	11
11	Figure composte	12
12	I problemi: come si leggono	13
13	La verifica	14

1 Cosa serve prima di partire

Questo capitolo è il **ripasso dei prerequisiti**: la geometria delle medie, quella delle aree e dei perimetri, che alle superiori si dà per saputa. Non ci sono dimostrazioni: c'è la figura, la formula, come si gira la formula, e il problema.

La parte che i libri saltano e che qui c'è tutta sono le **formule inverse**. «Si ricava» non è una spiegazione: se dall'area devi tirare fuori la base, la formula va scritta.

Cosa devi già sapere

- **Le quattro operazioni**, e soprattutto la divisione che torna indietro: se $A = b \cdot h$, allora $b = A : h$. È tutto il segreto delle formule inverse.
- **La radice quadrata** come operazione inversa del quadrato: $\sqrt{49} = 7$ perché $7^2 = 49$. Serve ogni volta che una formula ha un quadrato dentro.
- **Le unità di misura**. Le lunghezze in cm o m, le aree in cm^2 o m^2 . Passando da cm a m le lunghezze si dividono per 100, ma le aree per 10 000: sono due quadrati, e i quadrati si dividono per 100^2 .
- **Perimetro e area sono due cose diverse**: il primo è il giro, il secondo quanto sta dentro. Si misurano con unità diverse, ed è il modo più veloce per accorgersi di aver risposto alla domanda sbagliata.

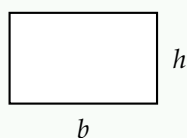
2 Perimetro e area

Formula 2.1: Le due misure: Il **perimetro** P è la somma di tutti i lati: si misura in centimetri.

L'**area** A è la superficie racchiusa: si misura in centimetri *quadrati*.

Nei poligoni regolari il perimetro si scrive $2p$, e p è il semiperimetro.

Esempio Svolto 2.1: La stessa figura, due domande:



Un rettangolo con $b = 8 \text{ cm}$ e $h = 5 \text{ cm}$.

1. **Perimetro**: giro tutto intorno,

$$P = 2 \cdot (8 + 5) = \mathbf{26 \text{ cm}}$$

2. **Area:** base per altezza,

$$A = 8 \cdot 5 = 40 \text{ cm}^2$$

3. Due numeri diversi e due unità diverse. Se un problema chiede «quanto recinto serve» vuole il perimetro; se chiede «quanta vernice» vuole l'area.

L'unità di misura è un controllo gratis

Se calcoli un'area e ti viene «26 cm», qualcosa non va: le aree si misurano in cm^2 . E se calcoli un perimetro e ti viene in cm^2 , hai moltiplicato invece di sommare. Scrivere sempre l'unità non è pignoleria: è il modo più veloce per accorgersi dell'errore.

Le aree non si convertono come le lunghezze

1 m = 100 cm, ma $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$, perché è un quadrato di 100×100 . Quindi $50\,000 \text{ cm}^2$ non sono 500 m^2 , ma 5 m^2 .

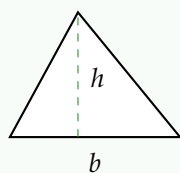
3 I triangoli

Formula 3.1: Area di un triangolo qualsiasi:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad P = l_1 + l_2 + l_3$$

L'altezza h è **perpendicolare** alla base: non è un lato, tranne nel triangolo rettangolo.

Esempio Svolto 3.1: Triangolo scaleno:



Con $b = 12 \text{ cm}$ e $h = 7 \text{ cm}$:

$$A = \frac{12 \cdot 7}{2} = \frac{84}{2} = 42 \text{ cm}^2$$

Controllo: il triangolo è metà del rettangolo 12×7 , che ha area 84. Metà di 84 è 42: torna.

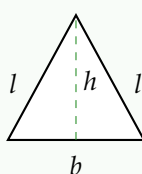
Formula 3.2: Isoscele ed equilatero: Isoscele (due lati uguali):

$$P = 2l + b \quad A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Equilatero (tre lati uguali):

$$P = 3l \quad h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \approx 0,866 \cdot l \quad A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \approx 0,433 \cdot l^2$$

Esempio Svolto 3.2: Isoscele: l'altezza con Pitagora:



Base $b = 16$ cm, lati obliqui $l = 10$ cm.

1. **L'altezza taglia la base a metà:** si formano due triangoli rettangoli con cateto $16 : 2 = 8$ e ipotenusa 10.

2. **Pitagora:**

$$h = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

3. **Area:**

$$A = \frac{16 \cdot 6}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

4. È il modo in cui Pitagora entra dentro quasi tutte le figure: se ne riparla al par. 7.

Il lato obliquo non è l'altezza

Nell'isoscele di prima, usare 10 come altezza darebbe $A = \frac{16 \cdot 10}{2} = 80 \text{ cm}^2$: sbagliato di quasi il doppio.

L'altezza è **perpendicolare** alla base, e nel disegno si riconosce dal quadratino dell'angolo retto. Se la figura non ce l'ha, l'altezza va calcolata.

4 I quadrilateri

Formula 4.1: Quadrato e rettangolo: Quadrato:

$$P = 4l \quad A = l^2 \quad d = l\sqrt{2}$$

Rettangolo:

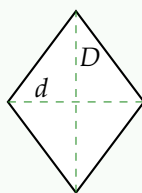
$$P = 2(b + h) \quad A = b \cdot h \quad d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

Formula 4.2: Parallelogramma e rombo: Parallelogramma:

$$P = 2(b + l) \quad A = b \cdot h$$

Rombo (le diagonali sono perpendicolari e si tagliano a metà):

$$P = 4l \quad A = \frac{D \cdot d}{2} \quad l = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Esempio Svolto 4.1: Rombo: area e lato:

Diagonali $D = 16$ cm e $d = 12$ cm.

1. Area:

$$A = \frac{16 \cdot 12}{2} = \mathbf{96 \text{ cm}^2}$$

2. Il lato: le mezze diagonali sono 8 e 6, e formano un triangolo rettangolo col lato.

$$l = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = \mathbf{10 \text{ cm}}$$

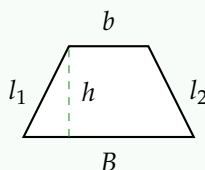
3. Perimetro: $P = 4 \cdot 10 = 40$ cm.

4. Nel rombo l'area si calcola con le diagonali, mai con i lati: quattro lati uguali non bastano a dire quanto è «schiacciato».

Formula 4.3: Trapezio:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \quad P = B + b + l_1 + l_2$$

B è la base maggiore, b la minore, h l'altezza (perpendicolare alle basi), l_1 e l_2 i lati obliqui.

Esempio Svolto 4.2: Trapezio:

Con $B = 14$ cm, $b = 8$ cm, $h = 6$ cm:

$$A = \frac{(14 + 8) \cdot 6}{2} = \frac{22 \cdot 6}{2} = \frac{132}{2} = 66 \text{ cm}^2$$

Controllo: la media delle basi è 11, e $11 \cdot 6 = 66$. La formula del trapezio è proprio «base media per altezza».

5 Le formule inverse

Qui sta il capitolo dentro il capitolo. Una formula si «gira» con la divisione, e le tre forme vanno sapute tutte e tre.

Metodo 5.1: Come si gira una formula:

1. Guarda che cosa **moltiplica** l'incognita.
2. Porta quel numero dall'altra parte **dividendo**.
3. Se nella formula c'è un $:$ 2, nell'inversa diventa un $\cdot 2$ — e viceversa.
4. Se c'è un quadrato, nell'inversa c'è una **radice**.

Formula 5.1: Le inverse che servono più spesso:

$$A = b \cdot h \Rightarrow b = \frac{A}{h}, \quad h = \frac{A}{b}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow b = \frac{2A}{h}, \quad h = \frac{2A}{b}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow D = \frac{2A}{d}, \quad d = \frac{2A}{D}$$

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2A}{B + b}, \quad B + b = \frac{2A}{h}$$

$$A = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{A} \quad P = 4l \Rightarrow l = \frac{P}{4}$$

Esempio Svolto 5.1: Dall'area alla base:

Un triangolo ha area 42 cm^2 e altezza 7 cm. Quanto misura la base?

1. La formula diretta è $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

2. **Giro:** il 2 che divideva passa a moltiplicare, e l' h che moltiplicava passa a dividere.

$$b = \frac{2A}{h} = \frac{2 \cdot 42}{7} = \frac{84}{7} = \mathbf{12 \text{ cm}}$$

3. **Controllo** rifacendo la diretta: $\frac{12 \cdot 7}{2} = 42 \text{ cm}^2$. Torna.

Il 2 va sopra, non sotto

Da $A = \frac{bh}{2}$ la tentazione è scrivere $b = \frac{A}{2h}$. È sbagliato: quel 2 stava *dividendo*, quindi passando dall'altra parte **moltiplica**.

Il controllo è sempre lo stesso: rimetti il risultato nella formula diretta. Con $b = \frac{42}{14} = 3$ verrebbe $A = \frac{3 \cdot 7}{2} = 10,5$, non 42.

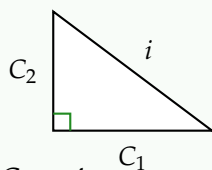
6 Il teorema di Pitagora

Formula 6.1: Le tre forme: In un triangolo **rettangolo**, detti C_1 e C_2 i cateti e i l'ipotenusa:

$$i = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad C_1 = \sqrt{i^2 - C_2^2} \quad C_2 = \sqrt{i^2 - C_1^2}$$

L'ipotenusa si trova con una **somma**, i cateti con una **differenza**: è l'unica cosa da ricordare.

Esempio Svolto 6.1: Le tre forme in azione:



1. **Trovo l'ipotenusa** con $C_1 = 3$ e $C_2 = 4$:

$$i = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$$

2. **Trovo un cateto** con $i = 13$ e $C_1 = 5$:

$$C_2 = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = \mathbf{12}$$

3. Le terne $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$ tornano continuamente nei problemi: conviene riconoscerle a vista, e anche $(8, 15, 17)$ e $(7, 24, 25)$.

Solo nei triangoli rettangoli

Pitagora vale **soltanto** se c'è l'angolo retto. In un triangolo qualunque con lati 4, 5 e 6 non è vero che $4^2 + 5^2 = 6^2$ ($41 \neq 36$), e infatti quel triangolo non è rettangolo.

Al contrario, questo dà un modo per *verificare* se un triangolo è rettangolo: si controlla se il quadrato del lato più lungo è la somma degli altri due.

7 Pitagora dentro le altre figure

Il teorema serve raramente da solo: quasi sempre è nascosto dentro un'altra figura. Riconoscere *dove* è il vero mestiere.

Metodo 7.1: Dove cercare il triangolo rettangolo:

1. **Rettangolo o quadrato:** la diagonale lo taglia in due triangoli rettangoli.
2. **Isoscele:** l'altezza sulla base lo taglia in due, e dimezza la base.
3. **Rombo:** le mezze diagonali e il lato.
4. **Trapezio rettangolo:** l'altezza, il lato obliquo e la differenza delle basi.
5. **Equilatero:** l'altezza dimezza il lato.

Esempio Svolto 7.1: La diagonale del rettangolo:

Rettangolo con $b = 12$ cm e $h = 5$ cm:

$$d = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = \mathbf{13 \text{ cm}}$$

È di nuovo la terna (5, 12, 13).

Esempio Svolto 7.2: Il lato obliquo del trapezio rettangolo:

Un trapezio rettangolo ha $B = 20$ cm, $b = 12$ cm e $h = 6$ cm.

1. Il triangolo rettangolo ha per cateti l'altezza 6 e la *differenza* delle basi:

$$B - b = 20 - 12 = 8 \text{ cm}$$

2. Pitagora:

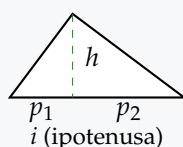
$$l = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = \mathbf{10 \text{ cm}}$$

3. Ora il perimetro: $P = 20 + 12 + 6 + 10 = 48$ cm.

8 I teoremi di Euclide

Due formule che valgono nel triangolo rettangolo e che i problemi usano quando compaiono le **proiezioni** dei cateti sull'ipotenusa.

Formula 8.1: Primo e secondo teorema:



Primo teorema: ogni cateto al quadrato è uguale all'ipotenusa per la sua proiezione.

$$C_1^2 = i \cdot p_1 \quad C_2^2 = i \cdot p_2$$

Secondo teorema: l'altezza al quadrato è il prodotto delle due proiezioni.

$$h^2 = p_1 \cdot p_2$$

Le proiezioni si sommano: $p_1 + p_2 = i$.

Esempio Svolto 8.1: Un triangolo rettangolo completo:

Ipotenusa $i = 25$ cm, proiezione $p_1 = 9$ cm.

1. **L'altra proiezione:** $p_2 = 25 - 9 = 16$ cm.

2. **Primo teorema** per il primo cateto:

$$C_1 = \sqrt{i \cdot p_1} = \sqrt{25 \cdot 9} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

3. **Secondo teorema** per l'altezza:

$$h = \sqrt{p_1 \cdot p_2} = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

4. **Controllo con Pitagora:** l'altro cateto è $\sqrt{25 \cdot 16} = 20$, e infatti $15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2$. Tutto torna.

9 I poligoni regolari

Un poligono è **regolare** se ha tutti i lati e tutti gli angoli uguali. L'**apotema** a è la distanza dal centro al punto medio di un lato.

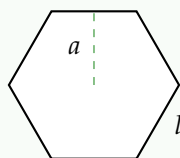
Formula 9.1: Area con l'apotema:

$$A = \frac{2p \cdot a}{2} = p \cdot a \quad a = l \cdot f$$

dove $2p$ è il perimetro e f è il **numero fisso** del poligono:

$$f_{\text{pentagono}} = 0,688 \quad f_{\text{esagono}} = 0,866$$

Nell'esagono regolare, in più, il **lato è uguale al raggio** della circonferenza circoscritta.

Esempio Svolto 9.1: Esagono regolare:

Lato $l = 6$ cm.

1. **Perimetro:** $2p = 6 \cdot 6 = 36$ cm.

2. **Apotema:** $a = 6 \cdot 0,866 = 5,196$ cm.

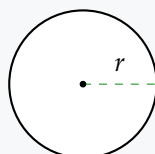
3. **Area:**

$$A = \frac{36 \cdot 5,196}{2} = 93,53 \text{ cm}^2$$

4. **Nota:** l'esagono è fatto di sei triangoli equilateri di lato 6, e l'apotema è la loro altezza — infatti $6 \cdot 0,866$ è proprio $\frac{6\sqrt{3}}{2}$.

Il numero fisso cambia con il poligono

0,866 vale per l'esagono, 0,688 per il pentagono: non sono intercambiabili. E il numero fisso moltiplica il **lato**, non il perimetro: $a = l \cdot f$.

10 Il cerchio**Formula 10.1: Circonferenza e area:**

$$C = 2\pi r \quad A = \pi r^2$$

e le inverse:

$$r = \frac{C}{2\pi} \quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Il diametro è $d = 2r$. Nei conti π si lascia scritto (risultato esatto) oppure si sostituisce con 3,14 (risultato approssimato): le due cose non si mescolano.

Esempio Svolto 10.1: Cerchio di raggio 5:

1. Circonferenza:

$$C = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \text{ cm} \approx 31,4 \text{ cm}$$

2. Area:

$$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2 \approx 78,5 \text{ cm}^2$$

3. Al contrario: se l'area è $36\pi \text{ cm}^2$, allora $r^2 = 36$ e $r = 6 \text{ cm}$.

Circonferenza e area si confondono

$C = 2\pi r$ ha il raggio al **primo grado**; $A = \pi r^2$ ce l'ha al **quadrato**. Se dall'area ricavi il raggio senza fare la radice, sbagli di parecchio: da $A = 25\pi$ il raggio è 5, non 25. L'unità aiuta: la circonferenza è una lunghezza (cm), l'area no (cm^2).

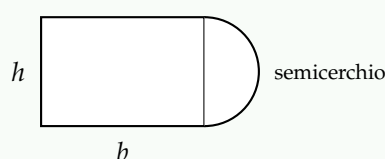
11 Figure composte

Nei problemi veri le figure sono messe insieme. Il metodo è sempre lo stesso: **spezzare**.

Metodo 11.1: Aree che si sommano e che si tolgono:

1. Guarda la figura e riconosci i pezzi semplici.
2. Calcola l'area di ognuno.
3. **Somma** i pezzi che ci sono, **sottrai** i buchi.
4. Per il perimetro, attenzione: si contano solo i lati **esterni**, non quelli dove i pezzi si toccano.

Esempio Svolto 11.1: Rettangolo con semicerchio:



Un rettangolo 10×6 cm con un semicerchio attaccato sul lato corto (diametro 6 cm, quindi raggio 3).

1. **Area del rettangolo:** $10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2$.

2. **Area del semicerchio:**

$$\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 9}{2} = 4,5\pi \approx 14,13 \text{ cm}^2$$

3. **Area totale:** $60 + 4,5\pi \approx 74,13 \text{ cm}^2$.

4. **Il perimetro** non comprende il lato dove il semicerchio è attaccato: $10 + 6 + 10 + \pi \cdot 3 \approx 35,42 \text{ cm}$.

12 I problemi: come si leggono

Metodo 12.1: Dal testo al risultato:

1. **Disegna la figura**, anche storta: serve a capire cosa c'è.
2. Scrivi sul disegno i **dati** con la loro lettera.
3. Scrivi che cosa chiede la domanda — perimetro? area? un lato?
4. Cerca la formula che collega i dati alla domanda; se manca un pezzo, chiediti se serve Pitagora.
5. Calcola, e **controlla** che il risultato abbia senso.

Esempio Svolto 12.1: Un problema completo:

Un giardino a forma di trapezio rettangolo ha le basi di 20 m e 12 m e l'altezza di 6 m. Quanto costa recintarlo a 15 euro al metro?

1. **La figura:** trapezio rettangolo, quindi un lato obliquo è perpendicolare alle basi e vale $h = 6 \text{ m}$.

2. **L'altro lato obliquo** con Pitagora, sui cateti 6 e $20 - 12 = 8$:

$$l = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ m}$$

3. **Il perimetro:** $20 + 12 + 6 + 10 = 48 \text{ m}$.

4. **Il costo:** $48 \cdot 15 = 720 \text{ euro}$.

5. **Ha senso?** Il giardino ha un'area di $\frac{(20+12) \cdot 6}{2} = 96 \text{ m}^2$, e 48 metri di recinzione sono plausibili. Sì.

Rispondere alla domanda sbagliata

Il problema di sopra chiede il **costo**, non il perimetro. Chi si ferma a 48 ha fatto tutto il lavoro e sbagliato la risposta.

Rileggere la domanda prima di scrivere il risultato costa cinque secondi.

13 La verifica

Metodo 13.1: Tre controlli che costano poco:

1. **L'unità di misura:** aree in cm^2 , lunghezze in cm.
2. **La formula inversa:** rimetti il risultato nella formula diretta e guarda se ritrovi il dato di partenza.
3. **Il buon senso:** un'area deve essere più grande dei suoi pezzi, un cateto più corto dell'ipotenusa, un lato positivo. Se viene una misura negativa, c'è un errore prima.

Esempio Svolto 13.1: Il controllo che smaschera:

Un triangolo rettangolo ha ipotenusa 10 e un cateto 8. Qualcuno calcola l'altro cateto come $\sqrt{100 + 64} = \sqrt{164} \approx 12,8$.

Non ha senso: un cateto non può essere più lungo dell'ipotenusa. L'errore è il segno: per i cateti si **sottrae**.

$$C = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$$

E $6 < 10$: adesso torna.

Indice analitico

Apotema, 10

Area, 3

Cerchio, 11

Circonferenza, 11

Figure composte, 12

Formule inverse, 7

Parallelogramma, 5

Perimetro, 3

Poligoni regolari, 10

Problemi di geometria, 13

Quadrato, 5

Rettangolo, 5

Rombo, 5

Teorema di Pitagora, 8, 9

Teoremi di Euclide, 10

Trapezio, 5

Triangolo, 4

Verifica, 14