

GONIOMETRIA & TRIGONOMETRIA

Compendio Completo: Valori Notevoli, Funzioni Analitiche e Risoluzione dei Triangoli

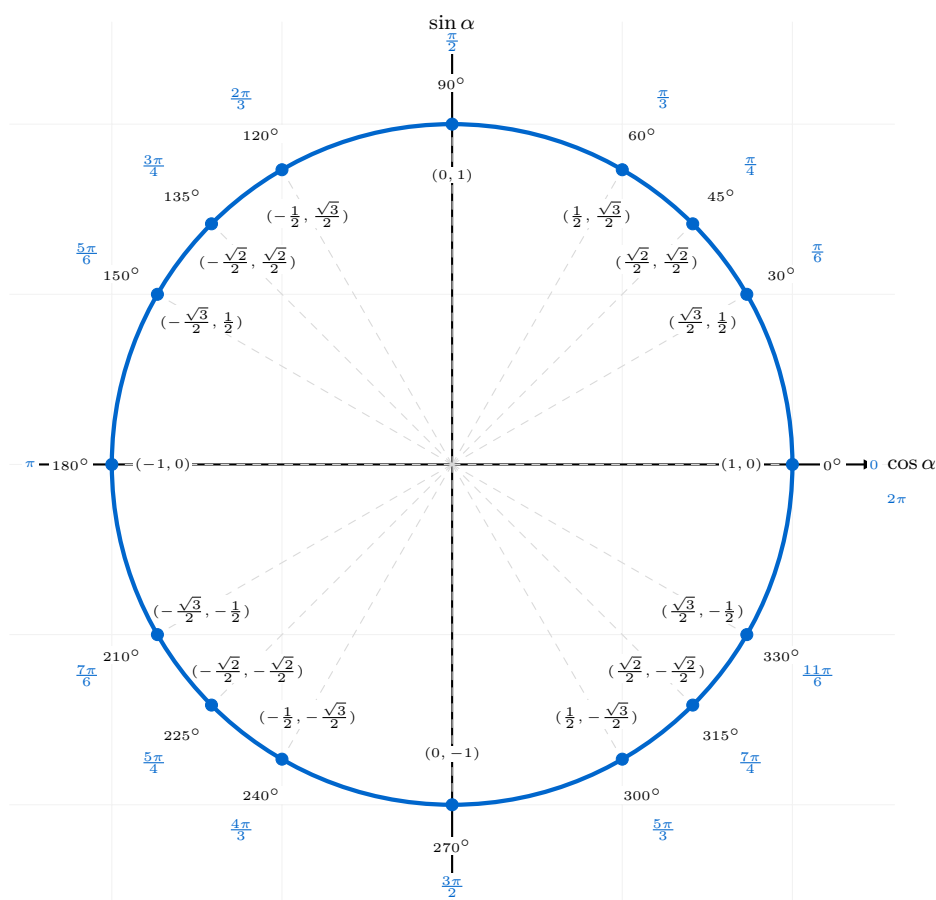
1. Valori delle Funzioni Goniometriche ($0^\circ - 360^\circ$)

Gradi	Radiani	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
0°	0	0	1	0	n.d.
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	n.d.	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0	n.d.
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	n.d.	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0	n.d.

2. Valori Particolari: 15°, 18° e Complementari

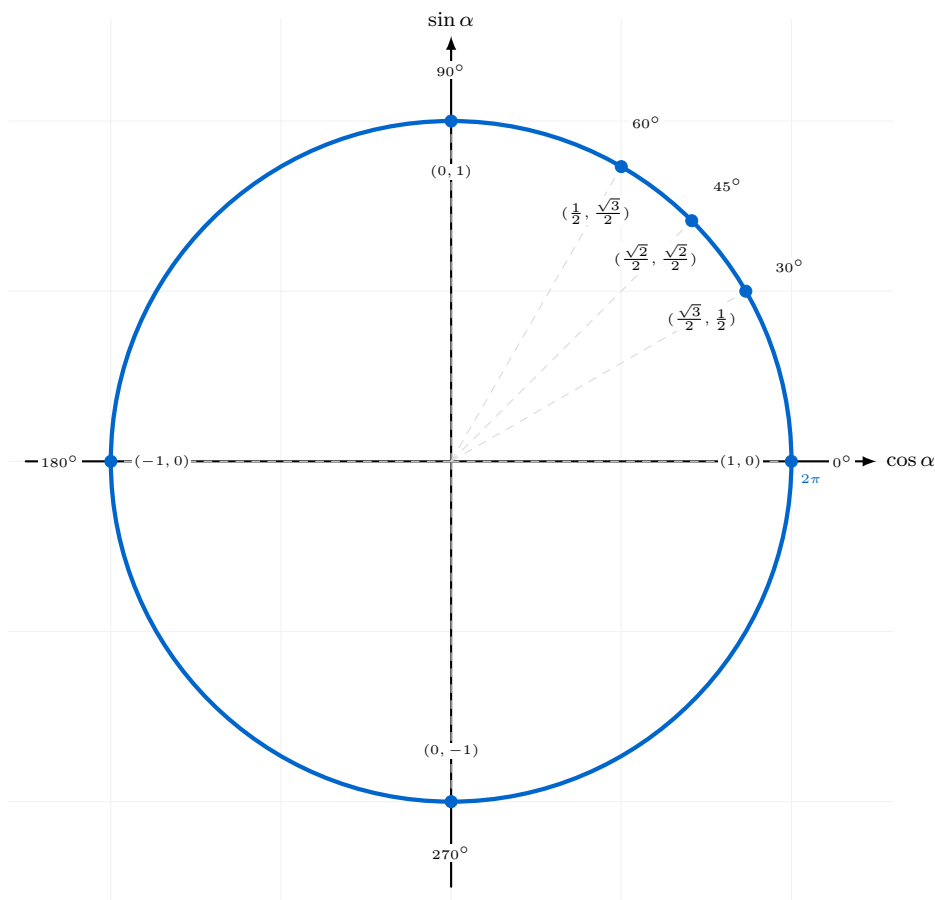
Gradi	Radiani	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2 - \sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
54°	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
72°	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2 + \sqrt{3}$

Visualizzazione Grafica degli Angoli e dei Valori



3. La Circonferenza Goniometrica

La circonferenza goniometrica è una circonferenza di raggio $r = 1$ centrata nell'origine $O(0,0)$. Essa permette di associare a ogni angolo α un punto P le cui coordinate rappresentano i valori di seno e coseno.



- **Coseno:** è l'ascissa del punto P sulla circonferenza ($x_P = \cos \alpha$).
- **Seno:** è l'ordinata del punto P sulla circonferenza ($y_P = \sin \alpha$).
- **Relazione Fondamentale:** Poiché il raggio è 1, per il teorema di Pitagora vale sempre $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

4. Schema dei Segni e Quadranti

Quadrante	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
I ($0 < \alpha < 90^\circ$)	+	+	+	+
II ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$)	+	-	-	-
III ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$)	-	-	+	+
IV ($270^\circ < \alpha < 360^\circ$)	-	+	-	-

5. Il Radiante: Definizione e Dimostrazione

Definizione: Il radiante è la misura di un angolo al centro che sottende un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza stessa ($l = r$).

Concetto	Formula e Descrizione
Formula Generale <i>Rapporto tra arco e raggio</i>	$\alpha_{rad} = \frac{l}{r}$ Dove l è la lunghezza dell'arco e r è il raggio.
Unità di misura	Il radiante è un numero puro (adimensionale), poiché deriva dal rapporto tra due lunghezze ($[L]/[L]$).

Dimostrazione: Quanti radianti ci sono in una circonferenza?

Per calcolare l'ampiezza in radianti di un angolo giro (360°), consideriamo l'intera circonferenza come arco di riferimento:

- 1. **Lunghezza dell'arco (l):** Per un angolo giro, l'arco corrisponde alla circonferenza totale: $l = 2\pi r$
- 2. **Applicazione della formula:** Sostituiamo l nella definizione di radiante:

$$\alpha_{giro} = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r}$$

- 3. **Semplificazione:** Il raggio r si elide, dimostrando che la misura non dipende dalla dimensione del cerchio:

$$\alpha_{giro} = 2\pi \text{ rad}$$

CONCLUSIONE LOGICA: Se un angolo giro misura 2π radianti, allora un angolo piatto (180°) misura esattamente π radianti. Da qui deriva la proporzione che usiamo per tutte le conversioni.

6. Conversione Gradi $\longleftrightarrow$ Radianti

La proporzione fondamentale per ogni conversione è: $\frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha_{rad}}{\pi}$

Obiettivo	Formula ed Esempio Pratico
Da Gradi a Radianti <i>Si moltiplica per π e si divide per 180.</i>	$\alpha_{rad} = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$ Esempio (60°): $60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$
Da Radianti a Gradi <i>Si sostituisce π con 180°.</i>	$\alpha^\circ = \alpha_{rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$ Esempio ($\frac{3\pi}{4}$): $\frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 135^\circ$

TRUCCO RAPIDO: Per passare da Radianti a Gradi al volo, basta sostituire mentalmente π con 180° e semplificare.
Esempio: $\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$.

7. Conversione Sessagesimali $\longleftrightarrow$ Sessadecimali

Mentre i gradi **sessadecimali** esprimono i sottomultipli tramite decimali (es. $12,5^\circ$), i gradi **sessagesimali** utilizzano primi ($'$) e secondi ($''$), basati sulla divisione in base 60.

Direzione	Procedura ed Esempio Pratico
Sessagesimali $\rightarrow$ Sessadecimali ($G^\circ p' s'' \rightarrow G, d^\circ$)	Formula: $G_{dec} = G + \frac{p}{60} + \frac{s}{3600}$ Esempio ($20^\circ 15' 36''$): $20 + \frac{15}{60} + \frac{36}{3600} = 20 + 0,25 + 0,01 = \mathbf{20,26^\circ}$
Sessadecimali $\rightarrow$ Sessagesimali ($G, d^\circ \rightarrow G^\circ p' s''$)	Procedura: 1. La parte intera sono i gradi (G). 2. Moltiplica la parte decimale per 60: l'intero sono i primi (p). 3. Moltiplica il nuovo decimale per 60 per i secondi (s). Esempio ($45,42^\circ$): $0,42 \cdot 60 = 25,2 \rightarrow \mathbf{25'}$ $0,2 \cdot 60 = \mathbf{12''} \Rightarrow \mathbf{45^\circ 25' 12''}$

DA RICORDARE: Un grado è diviso in 60 primi ($1^\circ = 60'$) e ogni primo è diviso in 60 secondi ($1' = 60''$). Di conseguenza, un grado corrisponde a 3600 secondi ($1^\circ = 3600''$).

8. Relazioni Fondamentali della Goniometria

Queste formule permettono di legare tra loro le funzioni goniometriche dello stesso angolo α e di ricavarne i valori conoscendone anche solo uno.

Nome	Formula e Condizioni
Prima Relazione Fondamentale	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ <i>Derivata dal Teorema di Pitagora sulla circonferenza unitaria.</i>
Seconda Relazione Fondamentale	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad C.E. \alpha \neq 90^\circ + k180^\circ$
Terza Relazione Fondamentale	$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad C.E. \alpha \neq k180^\circ$

9. Tabella di Conversione tra Funzioni Goniometriche

Questa tabella permette di esprimere una funzione goniometrica (riga) conoscendo il valore di un'altra (colonna).

	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\tan \alpha}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{\cot \alpha}{\pm\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sin \alpha}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\tan \alpha$	$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	$\cot \alpha$

REGOLA DEL SEGNO ($\pm$): Il segno della radice dipende dal **quadrante** in cui si trova l'angolo α .

10. Formule degli Archi Associati

10.1 Funzioni Invariate ($\alpha \pm \pi, 2\pi$)

Arco	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
$-\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
$\pi + \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$
$2\pi - \alpha$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$	$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

10.2 Cofunzioni: Scambio della Funzione ($\alpha \pm \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$)

Arco	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$

11. Formule di Addizione, Sottrazione e Duplicazione

Funzione	Addizione (+)	Sottrazione (-)
$\sin(\alpha \pm \beta)$	$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta)$	$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
$\tan(\alpha \pm \beta)$	$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$	$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

Formule di Duplicazione	
$\sin(2\alpha)$	$2 \sin \alpha \cos \alpha$
$\cos(2\alpha)$	$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
$\tan(2\alpha)$	$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

12. Formule di Bisezione

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
$\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

13. Formule di Prostaferesi e Werner

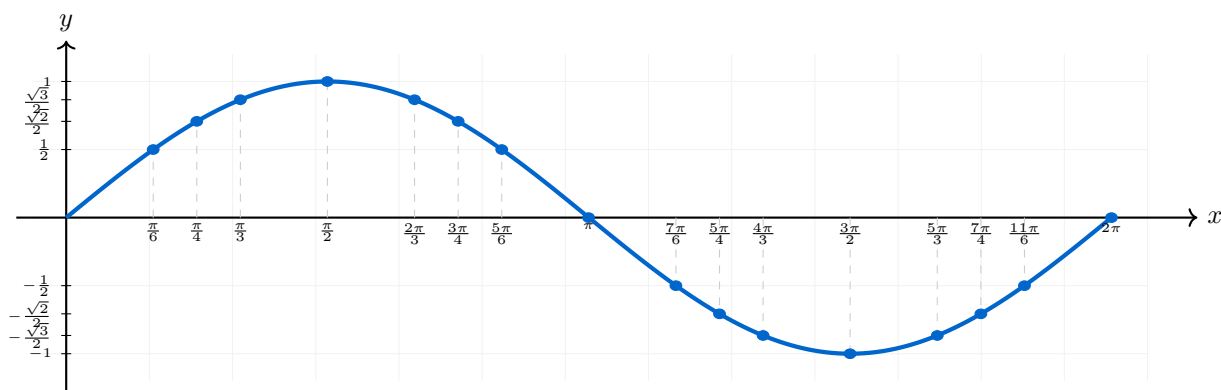
13.1 Prostaferesi (Somma $\rightarrow$ Prodotto)

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

13.2 Werner (Prodotto $\rightarrow$ Somma)

$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$

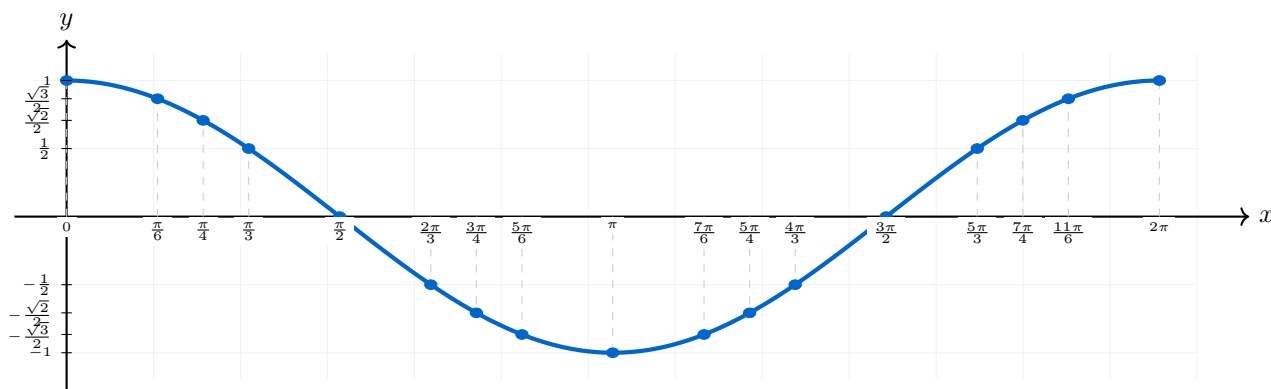
14. La Funzione Seno: Grafico Dettagliato con Ascisse Notevoli



Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Gradi	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
rad	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

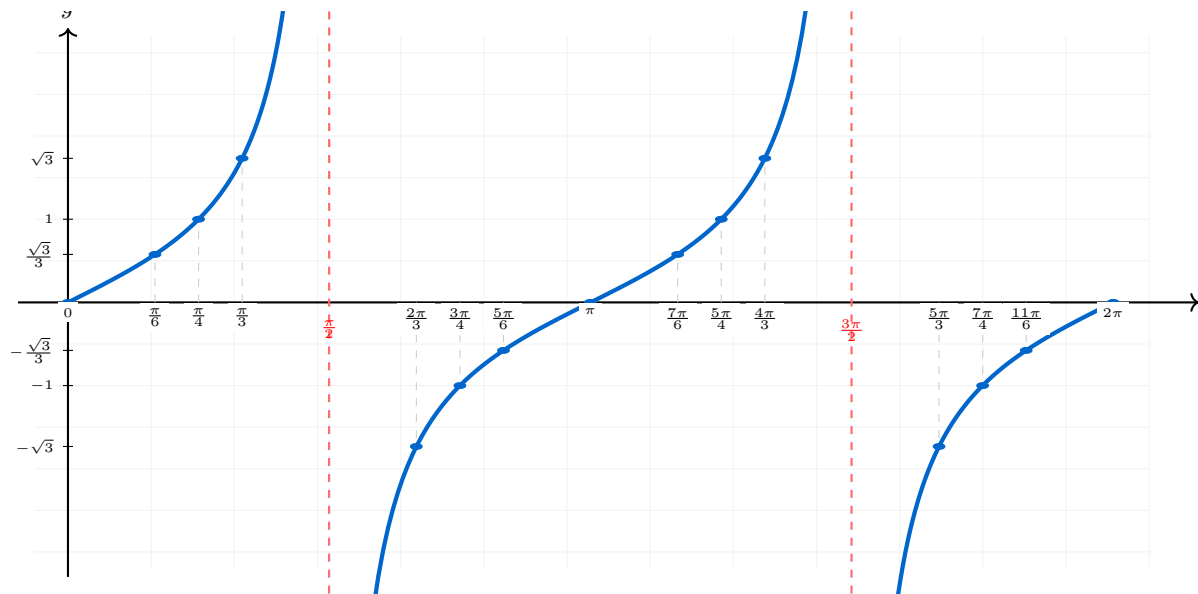
Studio della Funzione Coseno ($y = \cos x$)



Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

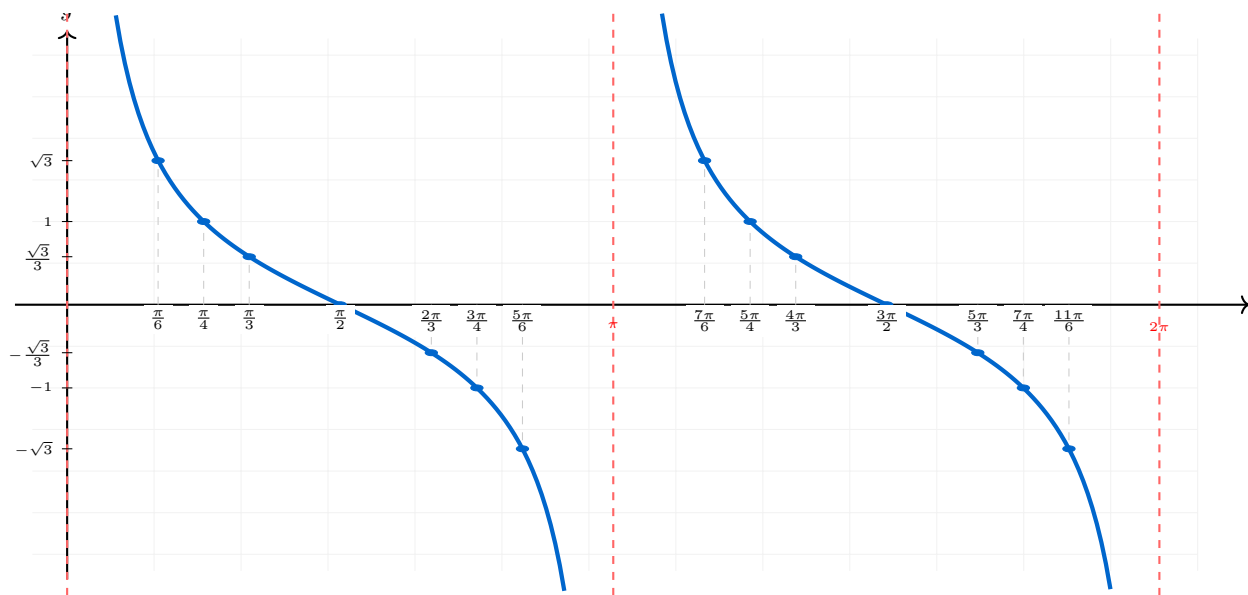
Gradi	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
rad	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Studio della Funzione Tangente ($y = \tan x$)



Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

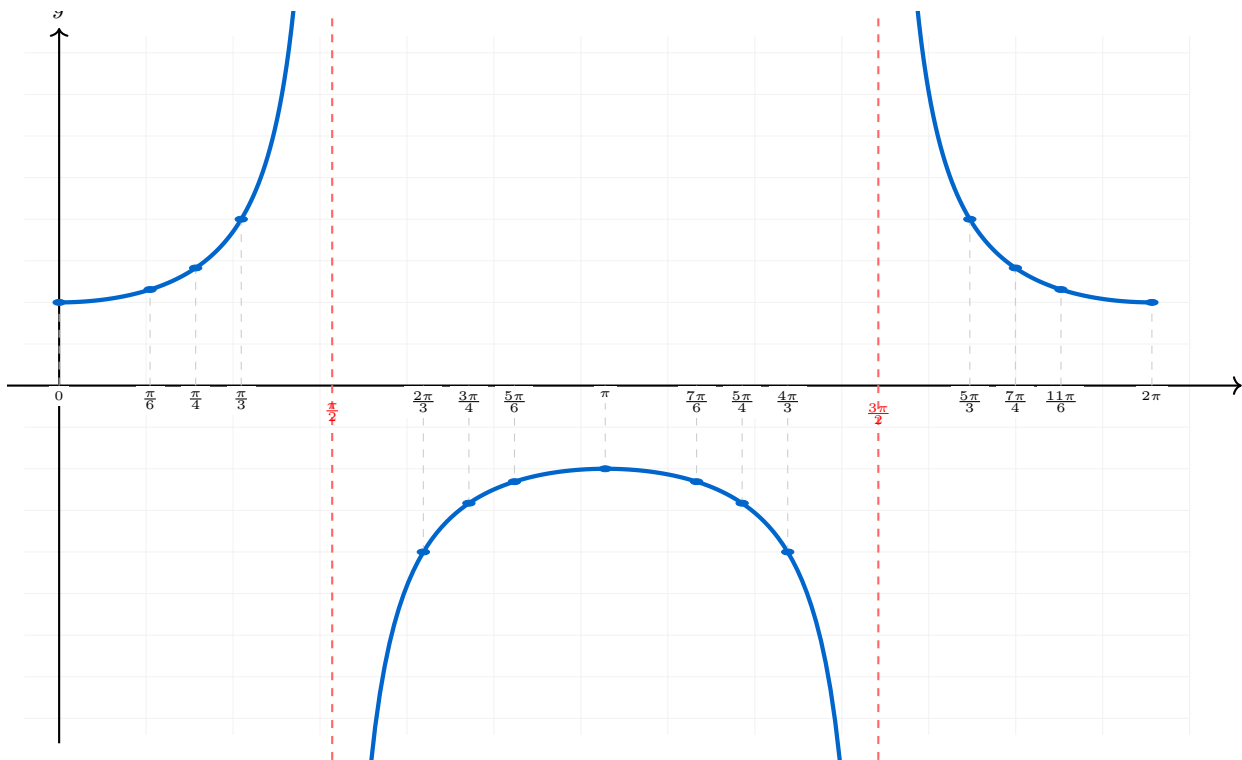
Studio della Funzione Cotangente ($y = \cot x$)



Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cot x$	n.d.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	n.d.

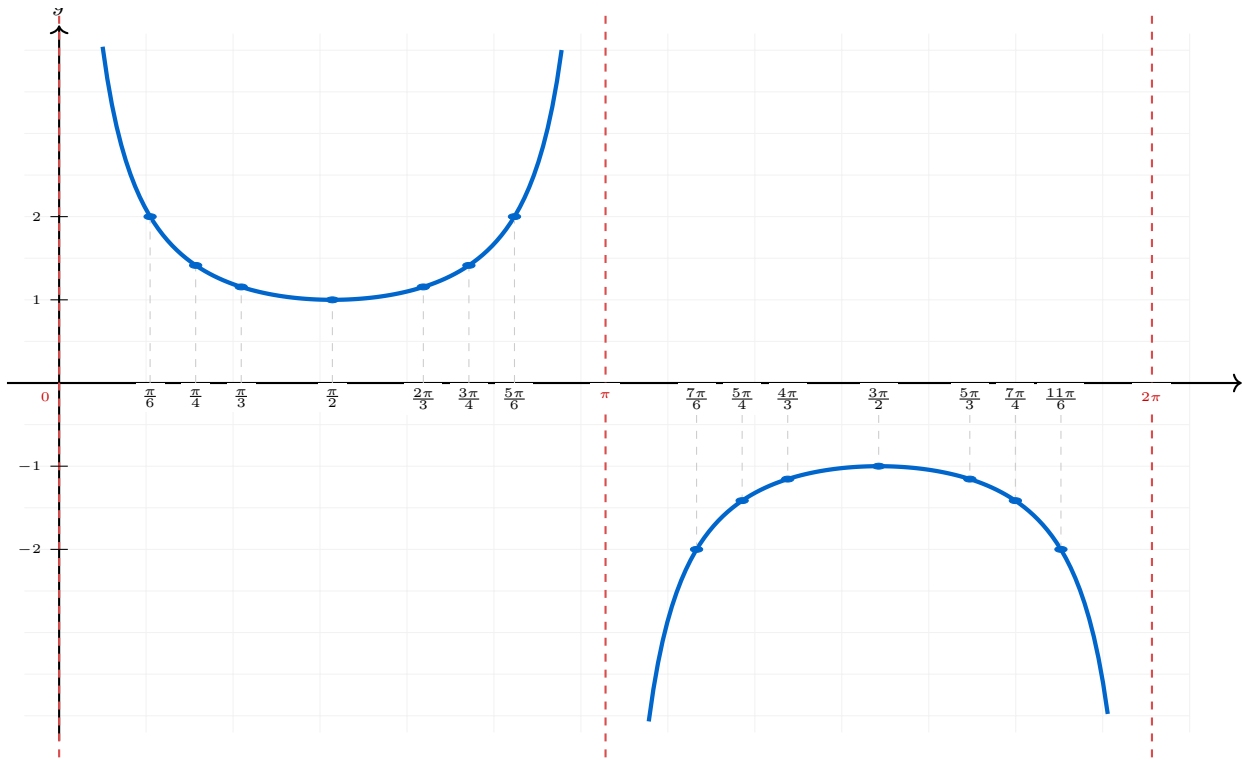
Gradi	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
rad	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cot x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	n.d.

Studio della Funzione Secante ($y = \sec x$)



rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sec x$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	n.d.	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1

Studio della Funzione Cosecante ($y = \csc x$)



Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
csc x	n.d.	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	n.d.

Gradi	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
rad	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
csc x	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	n.d.

Conversioni per Secante e Cosecante

Funzione	In funzione di $\sin \alpha$	In funzione di $\cos \alpha$	In funzione di $\tan \alpha$
$\sec \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cos \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$
$\csc \alpha$	$\frac{1}{\sin \alpha}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$

RELAZIONE TRA SECANTE E COSECANTE

Oltre alla relazione pitagorica derivata $\frac{1}{\sec^2 \alpha} + \frac{1}{\csc^2 \alpha} = 1$, vale la seguente identità:

$$\sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha = \sec^2 \alpha \cdot \csc^2 \alpha$$

Inoltre, essendo funzioni complementari (cofunzioni):

$$\sec \alpha = \csc \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad \text{e} \quad \csc \alpha = \sec \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

15. Formule Parametriche

Posto $t = \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right)$, con $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, si ha:

Seno	Coseno	Tangente
$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$	$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$	$\tan \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$

16. Teoremi sui Triangoli Qualunque

Teorema	Formula e Descrizione
Teorema dei Seni	$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ <i>Il rapporto tra lato e seno dell'angolo opposto è costante e pari al diametro del cerchio circoscritto.</i>
Teorema di Carnot (Coseno)	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ <i>Generalizzazione del Teorema di Pitagora per triangoli qualsiasi.</i>
Teorema dell'Area	$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta$
Teorema della Corda	$\text{Corda} = 2R \sin \alpha$ <i>Dove α è un qualunque angolo alla circonferenza che insiste sulla corda.</i>

17. Soluzioni Equazioni Goniometriche Elementari

Equazione	Soluzioni Generali ($k \in \mathbb{Z}$)
$\sin x = m$	$x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$
$\cos x = m$	$x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\alpha + 2k\pi$
$\tan x = m$	$x = \alpha + k\pi$
$\cot x = m$	$x = \alpha + k\pi$

18. Formule Parametriche (Sostituzione in t)

Queste formule permettono di trasformare funzioni goniometriche in espressioni algebriche razionali, fondamentali per la risoluzione di equazioni lineari.

DEFINIZIONE DEL PARAMETRO t : $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ con $\alpha \neq \pi + 2k\pi$

Seno	Coseno	Tangente
$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}$	$\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

19. Calcolo del Periodo delle Funzioni

Data una funzione goniometrica in cui l'argomento è moltiplicato per un coefficiente k (con $k > 0$), il periodo T della funzione subisce una variazione (contrazione o dilatazione) secondo le seguenti regole:

Tipo di Funzione	Periodo Standard	Nuovo Periodo (T)
$\sin(kx), \cos(kx)$ $\sec(kx), \csc(kx)$	2π	$T = \frac{2\pi}{k}$
$\tan(kx), \cot(kx)$	π	$T = \frac{\pi}{k}$

Esempi Pratici per Tipologia

1. Funzioni a periodo 2π (Seno/Coseno):
- Esempio: $y = \sin(4x) \implies k = 4$
 - Calcolo: $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (La funzione si ripete ogni 90°)
2. Funzioni a periodo π (Tangente/Cotangente):
- Esempio: $y = \tan\left(\frac{1}{3}x\right) \implies k = \frac{1}{3}$
 - Calcolo: $T = \frac{\pi}{1/3} = 3\pi$ (La funzione si dilata)
3. Funzioni con coefficiente frazionario complesso:
- Esempio: $y = \cos\left(\frac{2}{5}x\right) \implies k = \frac{2}{5}$
 - Calcolo: $T = 2\pi \cdot \frac{5}{2} = 5\pi$

REGOLA GENERALE PER SOMME DI FUNZIONI:

Se una funzione è data dalla somma di più funzioni goniometriche (es. $f(x) = \sin(ax) + \cos(bx)$), il periodo complessivo è il **minimo comune multiplo** tra i singoli periodi.

20. Grafico della Sinusoide Trasformata: $y = A \sin(kx + q)$

Il grafico della funzione $y = A \sin(kx + q)$ si ottiene applicando alla sinusoide elementare $y = \sin x$ una serie di trasformazioni geometriche regolate dai parametri A , k e q .

Analisi dei Parametri

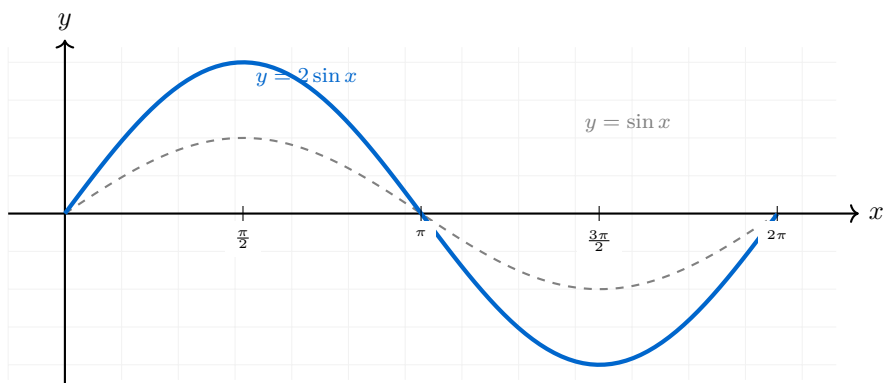
Parametro	Effetto sul Grafico
A (Amplitudine)	Determina la dilatazione verticale . Il valore massimo raggiunto è $ A $ e il minimo è $- A $. Se $A < 0$, il grafico risulta ribaltato rispetto all'asse x .
k (Pulsazione)	Determina la dilatazione/contrazione orizzontale . Modifica il periodo della funzione: $T = \frac{2\pi}{k}$. Più grande è k , più "compressa" è la sinusoide.
q (Fase)	Determina la traslazione orizzontale (spostamento di fase). Il grafico trasla verso sinistra se $q > 0$ e verso destra se $q < 0$. Lo spostamento effettivo è pari a $-\frac{q}{k}$.

21. Analisi dei Parametri: $y = A \sin(kx + q)$

21.1 1. L'Ampiezza (A): Dilatazione Verticale

Il parametro A modifica l'altezza delle creste e la profondità delle valli.

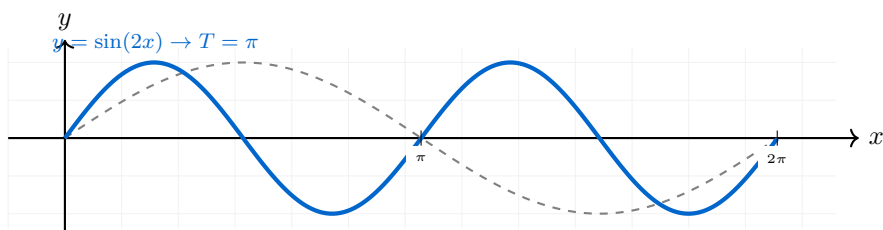
- Se $|A| > 1$: la funzione si dilata verticalmente.
- Se $0 < |A| < 1$: la funzione si contrae verso l'asse x .
- Se $A < 0$: la funzione viene ribaltata rispetto all'asse delle ascisse.



21.2 2. La Pulsazione (k): Dilatazione Orizzontale

Il parametro k agisce sul periodo della funzione: $T = \frac{2\pi}{k}$.

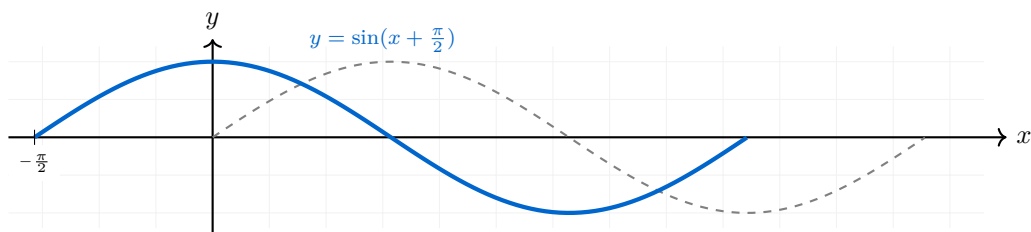
- Se $k > 1$: il periodo diminuisce (il grafico si "comprime").
- Se $0 < k < 1$: il periodo aumenta (il grafico si "allunga").



21.3 3. La Fase (q): Traslazione Orizzontale

Il parametro q sposta il grafico a destra o a sinistra lungo l'asse x . Lo sfasamento reale è dato da $\Delta x = -\frac{q}{k}$.

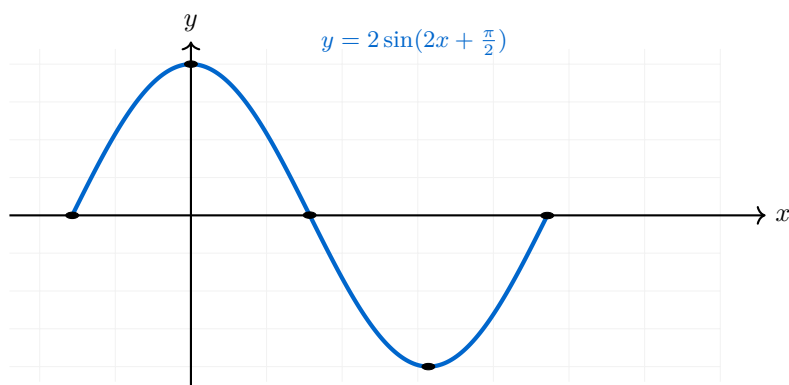
- Se $q > 0$: il grafico trasla verso **sinistra**.
- Se $q < 0$: il grafico trasla verso **destra**.



Guida Passo-Passo per il Disegno Finale

Per disegnare una funzione completa come $y = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{2})$, procedi così:

1. **Trova il Periodo (k):** Calcola $T = \frac{2\pi}{k}$. Nell'esempio $T = \pi$.
2. **Trova lo Sfasamento (q):** Calcola $\Delta x = -\frac{q}{k}$. Qui $-\frac{\pi/2}{2} = -\frac{\pi}{4}$. Questo è il tuo nuovo "zero".
3. **Imposta l'Altezza (A):** Segna i limiti sull'asse y (qui tra $+2$ e -2).
4. **Disegna i 5 punti chiave:**
 - **Start:** $(-\pi/4, 0)$
 - **Max:** aggiungere $T/4$ allo Start $\rightarrow (0, 2)$
 - **Centro:** aggiungere $T/2$ allo Start $\rightarrow (\pi/4, 0)$
 - **Min:** aggiungere $3T/4$ allo Start $\rightarrow (\pi/2, -2)$
 - **End:** aggiungere T allo Start $\rightarrow (3\pi/4, 0)$



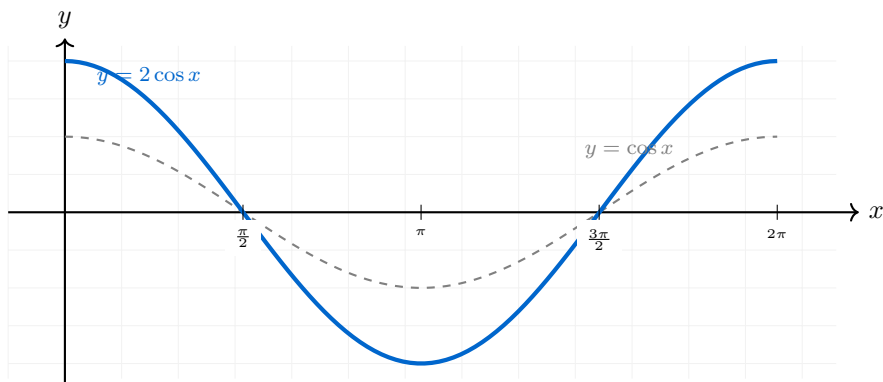
Procedura per il disegno manuale

1. **Calcolare il periodo:** $T = 2\pi/k$ per capire dove finisce un'oscillazione completa.
2. **Identificare l'ampiezza:** Segnare i limiti superiori (A) e inferiori ($-A$) sull'asse y .
3. **Gestire la fase:** Se $q \neq 0$, traslare i punti di partenza, massimo, zero e minimo della quantità $-q/k$.
4. **Tracciare i 5 punti chiave:** (Inizio, Max, Intersezione x , Min, Fine) all'interno del nuovo periodo T .

22. Analisi dei Parametri: $y = A \cos(kx + q)$

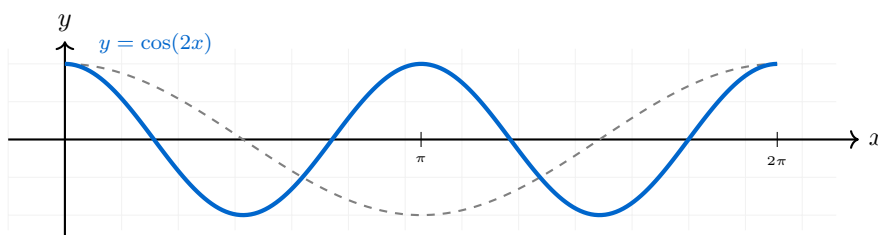
22.1 1. L'Ampiezza (A): Dilatazione Verticale

Il parametro A modifica l'altezza del grafico. Per la cosinusoidale, questo significa che il valore massimo passa da 1 a A e il valore minimo da -1 a $-A$.



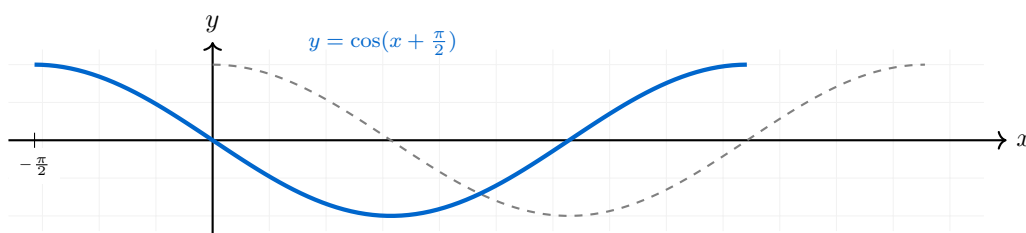
22.2 2. La Pulsazione (k): Dilatazione Orizzontale

Il parametro k determina quante oscillazioni complete avvengono in un intervallo di 2π . Il nuovo periodo è $T = \frac{2\pi}{k}$.



22.3 3. La Fase (q): Traslazione Orizzontale

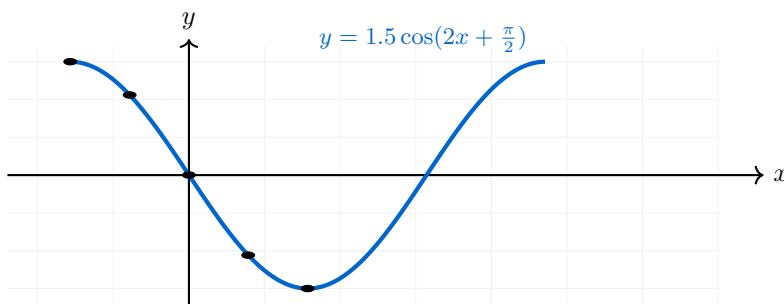
Il parametro q sposta il punto di massimo iniziale (che normalmente è su $x = 0$) a sinistra o a destra. Lo sfasamento reale è $\Delta x = -\frac{q}{k}$.



Guida Passo-Passo per il Coseno

Per disegnare una funzione completa come $y = A \cos(kx + q)$, la differenza principale rispetto al seno è la posizione dei punti chiave nel periodo T :

1. **Trova il Periodo (k):** Calcola $T = \frac{2\pi}{k}$.
2. **Trova lo Sfasamento (q):** Calcola $\Delta x = -\frac{q}{k}$ (posizione del primo Massimo).
3. **Disegna i 5 punti chiave del Coseno:**
 - Massimo iniziale: $(\Delta x, A)$
 - Primo Zero: $(\Delta x + T/4, 0)$
 - Minimo: $(\Delta x + T/2, -A)$
 - Secondo Zero: $(\Delta x + 3T/4, 0)$
 - Massimo finale: $(\Delta x + T, A)$

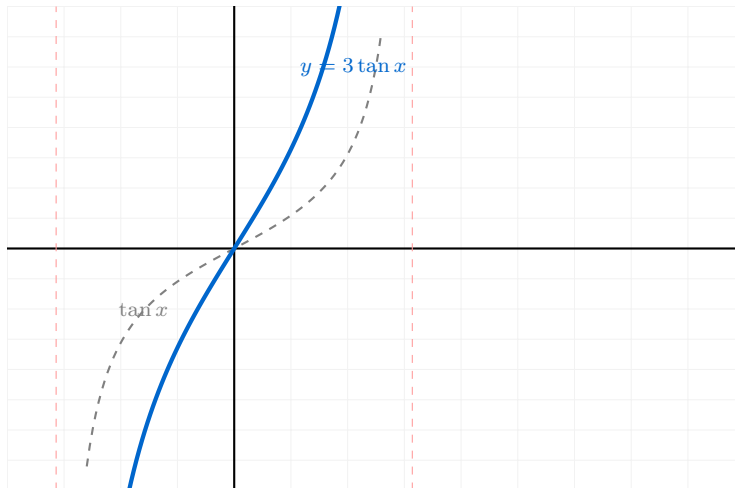


23. Analisi dei Parametri: $y = A \tan(kx + q)$

23.1 1. Il Coefficiente A : Dilatazione Verticale

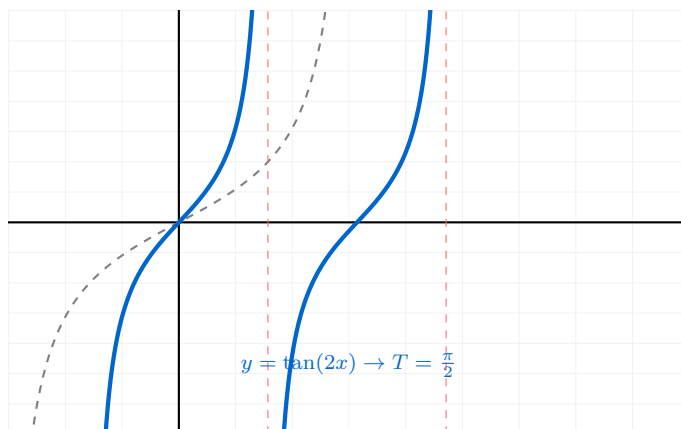
Nella tangente, A non è un'ampiezza ma un fattore di scala verticale.

- Se $|A| > 1$: la curva è più "ripida" e si allontana più velocemente dall'asse x .
- Se $0 < |A| < 1$: la curva è più "piatta" vicino all'origine.



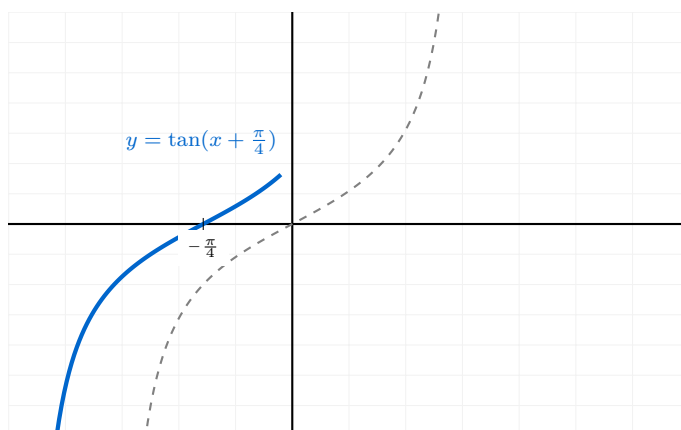
23.2 2. La Pulsazione (k): Frequenza e Asintoti

Il parametro k modifica il periodo: $T = \frac{\pi}{k}$. Questo restringe o allarga lo spazio tra due asintoti consecutivi.



23.3 3. La Fase (q): Traslazione dell'Origine

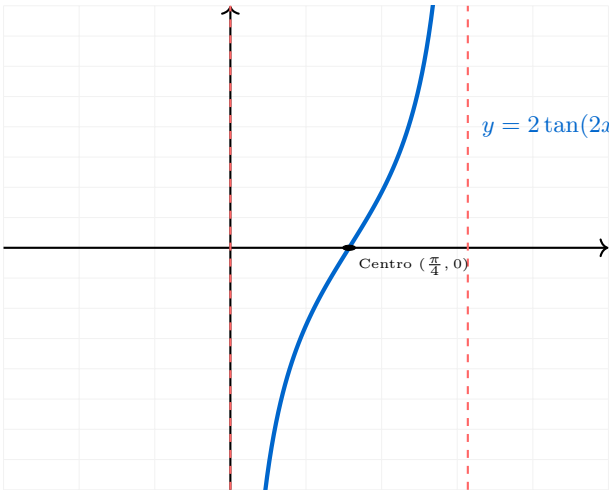
Il parametro q sposta il centro della tangente (il punto di flesso). Lo sfasamento è $\Delta x = -\frac{q}{k}$.



Guida Passo-Passo per la Tangente

Per disegnare $y = A \tan(kx + q)$, segui questo schema logico:

- 1. **Calcola il Periodo (k):** $T = \pi/k$. (Ricorda: la tangente ha periodo π).
- 2. **Trova il Centro (Δx):** Risolvi $kx + q = 0 \rightarrow \Delta x = -q/k$. Segna questo punto sull'asse x .
- 3. **Posiziona gli Asintoti:** Gli asintoti della funzione base sono a $\pm T/2$ dal centro.
Asintoti = $\Delta x \pm \frac{T}{2}$.
- 4. **Usa il coefficiente A per la pendenza:** Spostati dal centro di $T/4$ a destra e sinistra: in quei punti la funzione deve valere rispettivamente A e $-A$.



24. Funzioni Goniometriche Inverse

Per poter definire le inverse, è necessario restringere il dominio delle funzioni dirette affinché siano biunivoche.

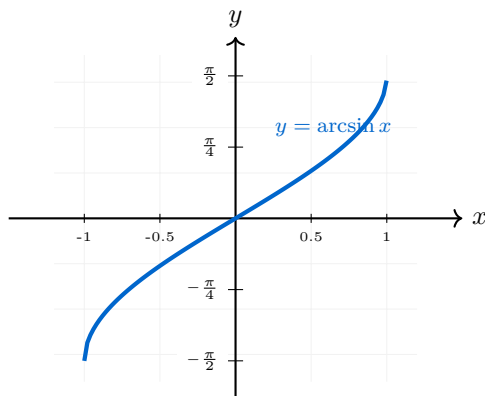
Funzione	Dominio (Argomento)	Codominio (Valore)	Relazione
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$x = \sin y$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$x = \cos y$
$y = \arctan x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$x = \tan y$
$y = \text{arccot } x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$	$x = \cot y$

25. Rappresentazione Grafica delle Funzioni Inverse

Per poter invertire le funzioni goniometriche, restringiamo il loro dominio in modo che siano biunivoche. Nel grafico, gli assi risultano "scambiati" rispetto alle funzioni dirette.

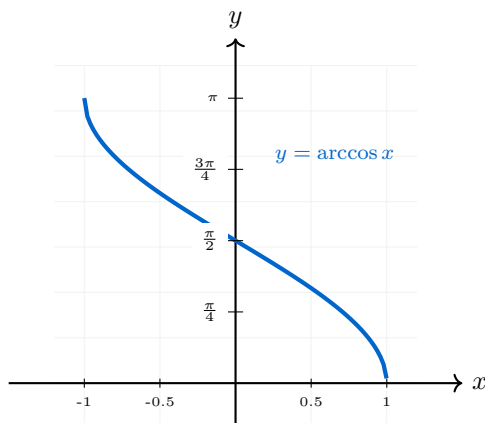
25.1 1. Funzione Arcoseno: $y = \arcsin x$

L'inversa del seno nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.



25.2 2. Funzione Arcocoseno: $y = \arccos x$

L'inversa del coseno nell'intervallo $[0, \pi]$.



and range $[0, \pi]$

25.3 3. Funzione Arcotangente: $y = \arctan x$

L'inversa della tangente nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Presenta asintoti orizzontali.

